

7. FOLGE, 1960, BAND 6, HEFT 5-6

# ANNALEN DER PHYSIK

1960  
PHYSIKS  
LIBRARY

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,  
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 460. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,  
W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL, R. ROMPE,  
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN  
Heidelberg

G. RICHTER  
Berlin



JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 28. September 1960

## Inhalt

T. Tietz, Lodz (Polen): Die Phasenverschiebung für den Grundzustand in der statistischen Theorie des Atoms .....	233
U. Rösler und G. Elbinger, Jena: Freiwillige und erzwungene Wachstumsorientierung bei der Züchtung von Ferriteinkristallen. Mit 7 Abbildungen ...	236
R. Köhler, Leipzig: Untersuchung der paramagnetischen Protonenresonanz in der kristallinen-festen Phase des Azoxy-phenol-di-p-n-amyläthers. Mit 2 Abbildungen .....	241
S. Pfau und A. Rutscher, Greifswald: Über den Zusammenhang der stehenden und laufenden Schichten in der positiven Säule von Glimmentladungen. Mit 8 Abbildungen .....	244
Z. Málek und W. Schüppel, Jena und Prag: Direkte Messung der einachsigen magnetischen Anisotropie aufgedampfter dünner Schichten von Eisen, Nickel, Permalloy und Kobalt. Mit 3 Abbildungen .....	252
T. Tietz, Lodz (Polen): Streuung von Elektronenstrahlen an neutralen Atomen für verschiedene Thomas-Fermische Potentiale .....	262
W. Brunner und H. Paul, Zeuthen bei Berlin: Zur Theorie der Kernspaltung. I. Mit 7 Abbildungen .....	267
H. Kirchner, Köln: Über die Felddesorption von Magnesium, Rubidium und Silber. Mit 6 Abbildungen .....	279
W. Boldt und H. Reimann, Berlin: Zur langwelligen Ultrarot-Emission von Gasentladungslampen. Mit 7 Abbildungen .....	293
K. H. Gothe, Berlin-Adlershof: Experimentelle Bestimmung der Komponenten des Permeabilitätstensors und des spektroskopischen Aufspaltungsfaktors an Mg—Mn-Ferriten im Mikrowellengebiet. I. Mit 7 Abbildungen .....	298
H. Tredner, Berlin: Über die allgemeine Form der Fortpflanzungsgesetze der Stoßwellen des Gravitationsfeldes .....	307
A. Papapetrou und H. Tredner, Berlin: Zur Frage der Existenz von singularitätsfreien Lösungen der allgemein-relativistischen Feldgleichungen, die Teilchenmodelle darstellen könnten. II. Mit 4 Abbildungen .....	311
R. Groth, Aachen und Marburg: Über die Temperaturabhängigkeit der kurzwelligen Ausläuferabsorption von MgO im Ultraroten. Mit 12 Abbildungen .....	328

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,  
Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den Zitäten wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34,— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

## Die Phasenverschiebung für den Grundzustand in der statistischen Theorie des Atoms

Von T. Tietz

### Inhaltsübersicht

In dieser Arbeit leiten wir eine analytische Formel für die Phasenverschiebung für den Fall der Nebenquantenzahl  $l = 0$  für das Thomas-Fermische Atom ab.

Für größere Nebenquantenzahlen kann sowohl die für kleine Phasen geltende Formel der Bornschen Näherung als auch die asymptotische Wenzel-Kramers-Brillouinsche Methode verwendet werden. In einer früheren Arbeit hat der Verfasser<sup>1)</sup> gezeigt, daß mit Hilfe der Bornschen sowie auch der asymptotischen Wenzel-Kramers-Brillouinschen Näherung geschlossene Formeln für die Phasen der kohärenten Streuung von Elektronen am Thomas-Fermischen und Hartreschen Atom abgeleitet werden können. Die Tabellen in der erwähnten Arbeit des Verfassers zeigen, daß der größte Fehler für die Phasen bei kohärenter Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom für den Fall der Nebenquantenzahl  $l = 0$  auftritt. Um auch im Falle  $l = 0$  zuverlässige Aussagen über die Phasen zu bekommen muß man die Schrödingersche Gleichung direkt lösen<sup>2)</sup>. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Phasenverschiebung für das Thomas-Fermische Atom für die Nebenquantenzahl  $l = 0$  zu berechnen. In einer Arbeit des Verfassers<sup>3)</sup> wurde gezeigt, daß folgendes Potential

$$V(r) = -\frac{2Za/\mu}{e^{ar/\mu} - 1} \quad (1)$$

das Gesamtpotential im Atom von Thomas und Fermi gut approximiert. Dieses Potential hat den Vorteil, daß man die Schrödingersche Gleichung direkt lösen kann. Die Konstante  $a$ , welche in der Gl. (1) vorkommt, läßt sich in atomaren Einheiten wie folgt schreiben.

$$\frac{a}{2\mu} = 1,36 \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right) Z^{1/2}. \quad (2)$$

In dieser letzten Formel ist  $Z$  die Ordnungszahl des Atoms und  $\mu$  bedeutet  $\mu = 0,88534/Z^{1/2}$ . Die Tab. 1 der Arbeit des Verfassers<sup>4)</sup> zeigt, daß unser Potential  $V(r)$  gute Eigenwerte für den Fall  $l = 0$  ergibt. In dieser Tabelle findet man einen Vergleich von unseren Eigenwerten mit den numerisch be-

<sup>1)</sup> T. Tietz, Ann. Physik. 3, 105 (1959).

<sup>2)</sup> P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien, Springer-Verlag 1949.

<sup>3)</sup> T. Tietz, J. chem. Physics 29, 684 (1958).

<sup>4)</sup> Man vergleiche hierzu<sup>3)</sup>.

rechneten Eigenwerten von Latter<sup>5)</sup>. Die Schrödinger-Gleichung für unser Potential  $V(r)$  schreiben wir in folgender Form

$$y'' + \left[ k^2 + \frac{2Za/\mu}{e^{ar/\mu} - 1} \right] y = 0. \quad (3)$$

Die zwei linear voneinander unabhängigen Lösungen  $y_1(r)$  und  $y_2(r)$  von (3) lassen sich, wie eine leichte Rechnung zeigt, wie folgt darstellen:

$$y_1(r) = e^{ikr} {}_2F_1 \left( -\frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}, -\frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}, 1 - \frac{2ik\mu}{a}, e^{-ar/\mu} \right) \quad (4)$$

und

$$y_2(r) = e^{-ikr} {}_2F_1 \left( \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}, \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}, 1 + \frac{2ik\mu}{a}, e^{-ar/\mu} \right). \quad (5)$$

${}_2F_1$  bezeichnet die hypergeometrische Funktion. Die bekannte Formel für die hypergeometrische Funktion zeigt

$${}_2F_1(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \text{ für } \operatorname{Re}(a+b-c) < 0, \quad (6)$$

daß  $y_1(0)$  und  $y_2(0)$  in unserem Falle eindeutig bestimmt sind. Für  $y_1(0)$  und  $y_2(0)$  gilt

$$y_1(0) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2ik\mu}{a}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)} \quad (7)$$

und

$$y_2(0) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2ik\mu}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)}. \quad (8)$$

$\Gamma(x)$  bezeichnet die Eulersche Gamma-Funktion. Die Randbedingung  $y(0) = 0$  der Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt uns eindeutig die gesuchte Phasenverschiebung  $\eta_0$  für den von uns betrachteten Fall  $l = 0$ . Man sieht leicht, daß folgende Lösung der Schrödinger-Gl. (3) die verlangte Randbedingung  $y(0) = 0$  erfüllt.

$$y(r) = \frac{C}{2i} \left[ \frac{\Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2ik\mu}{a}\right)} y_1(r) - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a} \sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2ik\mu}{a}\right)} y_2(r) \right]. \quad (9)$$

<sup>5)</sup> R. Latter, Phys. Rev. **99**, 510 (1955).



In dieser letzten Formel ist  $C$  eine beliebige Konstante. Für  $r \rightarrow \infty$  geht unsere Lösung  $y(r)$  über in

$$y(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{C}{2i} \left[ \frac{\Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2ik\mu}{a}\right)} e^{ikr} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2ik\mu}{a}\right)} e^{-ikr} \right]. \quad (10)$$

Ein Vergleich der letzten Formel mit dem Ausdruck

$$\sin(kr + \eta_0) = \frac{e^{i(kr + \eta_0)} - e^{-i(kr + \eta_0)}}{2i} \quad (11)$$

gibt uns für die Phasenverschiebung  $\eta_0$  für den Fall der Nebenquantenzahl  $l = 0$  das Schlußergebnis

$$e^{2i\eta_0} = \quad (12)$$

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{2ik\mu}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{ik\mu}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{2Z\mu a - k^2\mu^2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2ik\mu}{a}\right)}.$$

Dieser Ausdruck gibt uns die exakte Lösung für die Phasenverschiebung nach der Schrödinger-Gl. (3). Wie bekannt, erlaubt uns die Phasenverschiebung  $\eta_0$  die Berechnung des totalen Streuquerschnitts  $\sigma_0$  für den Fall  $l = 0$ , und zwar gilt in diesem Falle

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \eta_0. \quad (13)$$

Die Ergebnisse (12) und (13) sind wichtig für die kohärente Streuung von Elektronen am Thomas-Fermischen Atom.

Łódź (Polen), Universität Łódź Institut der Theoretischen Physik.

Bei der Redaktion eingegangen an 23. November 1959.

# **Freiwillige und erzwungene Wachstumsorientierung bei der Züchtung von Ferriteinkristallen**

Von *Ulrich Rösler<sup>1)</sup>* und *German Elbinger*

Mit 7 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Mit Hilfe von Standard-Laue-Aufnahmen verschiedener Rückstrahlrichtungen wurde eine Bestimmung der Wachstumsorientierung von Einkristallen und grobkristallinen Proben aus Nickel-, Magnesium- und Magnesium-Mangan-Ferrit durchgeführt. Diese waren nach der Verneuil-Methode zunächst ohne, später mit Impfkristall hergestellt worden. Im ersteren Falle konnte keine Bevorzugung irgendeiner Wachstumsrichtung festgestellt werden. Auf die Vorzüge der Verwendung von orientiert gezogenen Ferriteinkristallen wird besonders hingewiesen.

## **Einführung**

Im allgemeinen muß bei kubischen Kristallen trotz hoher Kristallsymmetrie eine Wachstumsanisotropie angenommen werden. Ein typisches Beispiel hierzu bildet das Steinsalz, das bei Züchtung aus übersättigter Lösung eine ausgeprägte Bevorzugung der [100]-Richtung zeigt. Es lag nahe, Analoges auch für Ferrite des Spinelltyps anzunehmen, um so mehr, als A. A. Popowa<sup>2)</sup> bei den nach den Verneuil-Verfahren ohne Impfkristall hergestellten Manganferriten eine Bevorzugung der [111]- und bei den Kobaltferriten eine solche der [110]-Richtung gefunden hatte.

## **Methode der röntgenographischen Orientierungsbestimmung**

Zur Überprüfung dieses Sachverhaltes erfolgte die Herstellung der Ferritkristalle<sup>3)</sup> zunächst in der für die Verneuil-Methode üblichen Art und Weise, d. h. die Proben wuchsen aus dem polykristallinen Aschekegel langsam heraus. Aus einer größeren Anzahl von so hergestellten Einkristallen und an einigen grobkristallinen Proben wurden Ebenen senkrecht zur Wachstumsrichtung angeschliffen und in Richtung ihrer Normalen Laue-Rückstrahlaufnahmen angefertigt.

Da Rückstrahlaufnahmen wegen der auftretenden hochindizierten Reflexe eine direkte Auswertung bezüglich der Kristallorientierung nicht ohne weiteres

<sup>1)</sup> Jetzt Arbeitsgruppe Speichertechnik der DAW.

<sup>2)</sup> A. A. Popowa, Aufs. d. Akad. d. UdSSR, Vol. **121**, 453 (1958).

<sup>3)</sup> G. Elbinger Exp. Techn. d. Phys. **7**, 193 (1959).

zulassen, wurden zunächst Standardaufnahmen<sup>4)</sup> in verschiedenen Rückstrahlrichtungen angefertigt. Hierzu diente eine Ferriteinkristallkugel von 1,5 mm Durchmesser, die mit Hilfe von Durchstrahlaufnahmen so orientiert wurde, daß die raumfeste Drehachse des Dreikreis-Goniometers mit der kristallographischen Richtung [001] und die Durchstrahlrichtung mit [110] zusammenfielen. Diese Kugel wurde dann auf ein zweites Goniometer überpflanzt, dessen raumfeste Drehachse mit der des ersten gleich war und dessen eine Goniometerkreisnormale in Richtung  $[\bar{1}\bar{1}0]$  wies. Mit dieser Montage war es möglich, durch Drehung der Goniometerdrehachse von  $0^\circ$  nach  $45^\circ$  die Durchstrahlrichtungen [110] bis [100] und durch Drehung am Goniometer selbst von  $0^\circ$  nach  $35,27^\circ$  die Durchstrahlrichtungen [110] bis [111] zu überstreichen, so daß alle Durchstrahlrichtungen innerhalb des Kugeldreiecks [110] – [100] – [111] durch zwei Einstellungen ermöglicht wurden. Dieses Dreieck beinhaltet aber alle denkbaren Durchstrahlrichtungen, falls man auf Permutationen und Vorzeichen der Indizes keine Rücksicht nimmt. Nachdem die Durchstrahlaufnahmen mit den Koordinaten  $0^\circ, 0^\circ; 0^\circ, 45^\circ$  und  $35,27^\circ, 0^\circ$  (als Eckpunkte des Kugeldreiecks) überprüft waren, wurden nach Auswechseln der Blenden im Abstand von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  42 Standardrückstrahlaufnahmen angefertigt.

Aus dem Vergleich dieser Aufnahmen mit den von den verschiedenen Einkristallen erhaltenen konnten durch Interpolation der Bilder die Koordinaten der Orientierung auf etwa  $3^\circ$  genau bestimmt werden.

### Proben ohne Impfkristall

Zunächst gelangten grobkristalline Proben zur Untersuchung, bei denen die einzelnen Kristallite makroskopisch nur mit Hilfe eines geeigneten Ätzmittels erkennbar sind. Die Kristalle waren aus technischem Nickel- und

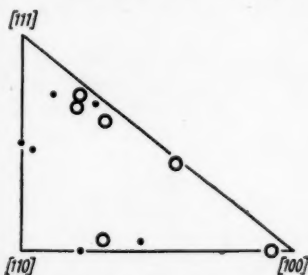


Abb. 1. Orientierungen der Kristallite zweier verschiedenen  $\text{NiOFe}_2\text{O}_3$ -Wachstumskörper (gleiche Zeichen gehören zum gleichen Kristall)

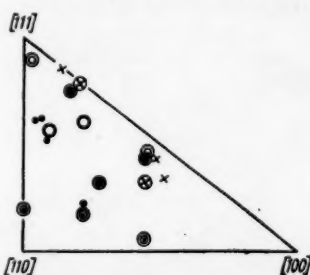


Abb. 2. Orientierungen der Kristallite in sechs verschiedenen  $\text{MgOFe}_2\text{O}_3$ -Wachstumskörpern (gleiche Zeichen gehören zum gleichen Kristall)

Magnesiumferritpulver hergestellt. Die Abb. 1 und 2 geben die Auswertung der angefertigten Laue-Aufnahmen wieder. Abb. 1 zeigt die Orientierungen der Kristallite von zwei verschiedenen Nickelferritproben, Abb. 2 die von

<sup>4)</sup> N. F. M. Henry, N. Lipson u. W. A. Wooster, The interpretation of x-ray diffraction photographs, London 1951.

sechs Magnesiumferritproben. Dabei gehören gleiche Zeichen zum gleichen Wachstumskörper. Die Abbildungen lassen eine statistische Verteilung der einzelnen Kristallite erkennen; eine Beeinflussung der Wachstumsrichtungen der Körner innerhalb eines Wachstumskörpers liegt daher nicht vor.

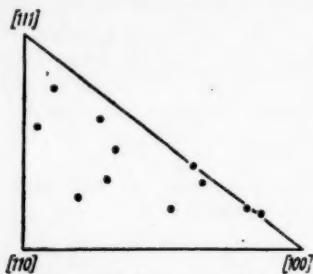


Abb. 3. Orientierungen der ohne Impfkristall gezogenen  $\text{NiOFe}_2\text{O}_3$ -Einkristalle (hier bezeichnet jeder Punkt einen Kristall)

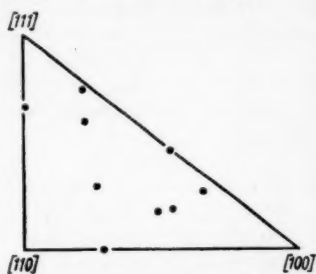


Abb. 4. Orientierungen der ohne Impfkristall gezogenen  $\text{MgOFe}_2\text{O}_3$ -Einkristalle (hier bezeichnet jeder Punkt einen Kristall)

Ebenso zeigen auch die einkristallinen Proben — hergestellt aus reinem Nickel- und Magnesiumferritpulver — eine vollkommen regellose Verteilung der Wachstumsrichtungen, wie aus den Abb. 3 und 4 zu entnehmen ist (hier bedeutet jeder Punkt einen Kristall).

#### Proben mit Impfkristall

Eine weitere Möglichkeit zum Nachweis von bevorzugten Wachstumsrichtungen bietet das Züchten von Einkristallen mit Hilfe von Impflingen. Zu diesem Zweck wurden Impfkristalle in Form von Stäbchen oder Kugeln, deren Orientierung vorher bestimmt bzw. die nach kristallographisch ausge-

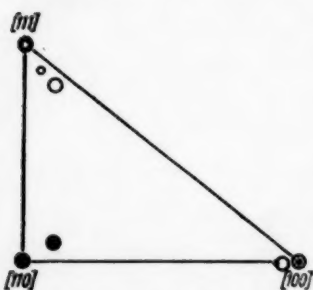


Abb. 5. Abweichungen der mit Impfkristall gezüchteten Mg-Mn-Ferrit-einkristalle von den vorgegebenen Orientierungen, die jeweils in einem der Eckpunkte des Pol-Dreiecks lagen (Impfling und Kristall haben gleiches Zeichen)

zeichneten Richtungen orientiert waren, in den Flammenschmelzofen eingesetzt. Auf diesen wuchsen dann die Kristalle auf. Laue-Aufnahmen von der Ober- und Unterseite der Proben ergaben eine Übereinstimmung der Bilder innerhalb von  $4^\circ$ . Das gleiche Ergebnis brachte das Züchten mehrerer Einkristalle von einem einzigen Impfling, von dem der Wachstumskörper jeweils mittels einer Trennscheibe abgelöst wurde. In der Abb. 5 sind die Ergebnisse dargestellt, die an einigen Proben aus Magnesium—Mangan—Ferrit erhalten wurden, bei denen die Impflinge (Kugeln, Durchmesser etwa 3 mm) vorher so orientiert waren, daß eine der drei ausgezeichneten kristallographischen Richtungen  $[100]$ ,  $[110]$  oder  $[111]$  in Richtung des Flammenkegels (Wachstumsrich-

U. Bö  
tung)  
noch  
der I  
Rück  
Impf  
gezog  
der u  
Orient  
Bo  
zufuhr  
gesch  
Wach  
drei F  
nicht  
den.  
Absch  
gen,  
einem  
sucht  
Bo  
Bildv  
tierung  
Bilde  
weich  
dem  
vor d  
daß -  
etwas  
wäch  
  
D  
erwei  
aus d  
Orient  
kann.  
bei F  
oft  
verein  
zu er  
sorgfä  
einer  
zur H  
kann.  
D  
Verfa  
an ein  
die au  
aufge

tung) zeigte. Innerhalb eines Fehlers von  $5^\circ$  bis  $6^\circ$ , auf den weiter unten noch eingegangen wird, fallen die Orientierungen der Kristalle mit denen der Impflinge zusammen. Die Abb. 6 stellt die nachgezeichneten Laue-Rückstrahlaufnahmen eines  $[111]$ -Impfkristalles (links) und die des damit gezogenen Einkristalles (rechts) dar, der um etwa  $5^\circ$  von der vorgegebenen Orientierung abweicht.

Bei konstant gehaltener Pulverzufuhr waren die günstigsten Absenkgeschwindigkeiten und damit die Wachstumsgeschwindigkeiten in den drei Richtungen  $[100]$ ,  $[110]$  und  $[111]$  nicht wesentlich voneinander verschieden. Somit zeigen auch die in diesem Abschnitt beschriebenen Untersuchungen, daß von einer Bevorzugung der einen oder der anderen kristallographischen Richtung bei den hier untersuchten Ferriten nicht gesprochen werden kann.

Bezüglich der auftretenden Fehler ist zu sagen, daß das Verfahren des Bildvergleichs, mit dem alle hier beschriebenen Orientierungen und Orientierungsbestimmungen ausgeführt wurden, bei einem Winkelabstand der Bilder von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  eine Genauigkeit von etwa  $3^\circ$  liefert. Die größeren Abweichungen müssen dem ungenauen Einsetzen des Impflings in den Ofen, dem nicht exakten Anschleifen der Basisebenen und der ungenauen Montage vor der Röntgenröhre zugeschrieben werden. Es ist auch durchaus denkbar, daß — vor allem bei größeren Impfkristallkugeln — der wachsende Kristall etwas seitlich ansetzt und daher mit einer abweichenden Orientierung aufwächst.

### Anwendung

Die im vorhergehenden Abschnitt erwähnte Verwendung von Impflingen erweist sich als vorzügliche Methode, orientierte Ferriteinkristalle herzustellen, aus denen man die zu Untersuchungen benötigten Proben einer bestimmten Orientierung bequem heraus schneiden kann. Auf diese Weise läßt sich auch das bei Ferriteinkristallproben schwierige und oft langwierige Orientieren wesentlich vereinfachen. Als weiterer Vorteil ist noch zu erwähnen, daß man im allgemeinen bei sorgfältigem Arbeiten einen Impfkristall einer bestimmten Ferritsorte beliebig oft zur Herstellung von Kristallen verwenden kann.

Die Brauchbarkeit der nach diesem Verfahren gezogenen Einkristalle konnte an einer Probe der Abb. 5 (Mg—Mn-Ferrit), die auf einer nach  $[100]$  orientierten Kugel aufgewachsen war, durch Messung der

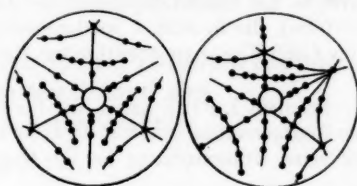


Abb. 6. Nachgezeichnete Laue-Rückstrahlaufnahmen eines Impfkristalles (links) und die des damit gezogenen Einkristalles (rechts), dessen Orientierung um etwa  $5^\circ$  von der vorgegebenen abweicht

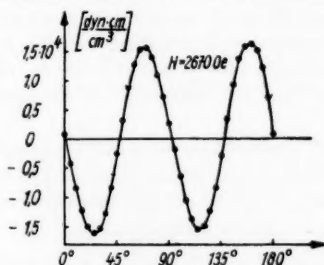


Abb. 7. Drehmomentenkurve einer Mg—Mn-Ferritscheibe, die aus einem geimpften  $[100]$ -Kristall ohne nachträgliche Orientierung herausgeschnitten wurde

magnetischen Kristallanisotropie nachgewiesen werden. Vom Kristall wurde senkrecht zur Wachstumsrichtung eine etwa 2 mm starke Scheibe abgetrennt und rund geschliffen, bis ihr Durchmesser ungefähr 5 mm betrug. An ihr erfolgte bei Raumtemperatur die Aufnahme der Drehmomentenkurve ( $H = 2670$  Oe), die in Abb. 7 wiedergegeben ist. Sie stimmt recht gut mit der für eine (100)-Ebene zu erwartenden Kurve ( $\sin 4\alpha$ ) überein.

Fräulein I. Fink haben wir für ihre sorgfältige Hilfe bei der Anfertigung der Röntgenaufnahmen und der Orientierungsbestimmungen, Herrn W. Scheibe für seine Unterstützung bei der Herstellung der Einkristalle sehr zu danken.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. Dezember 1959.

**Untersuchung der paramagnetischen Protonenresonanz  
in der kristallin-festen Phase des  
Azoxy-phenol-di-p-n-amylläthers**

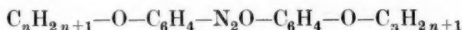
Von Roland Köhler

Mit 2 Abbildungen

**Inhaltsübersicht**

In der kristallin-festen Phase des Azoxy-phenol-di-p-n-amylläthers wurden bei einer Feldstärke  $H_0 = 7750$  Gauß die Linienformen der magnetischen Protonenresonanzabsorption in Abhängigkeit von der Temperatur registriert und daraus die mittleren 2. Momente  $\overline{\Delta H^2}$  bestimmt. Dabei wurde das Auftreten einer Zwischenphase unterhalb des Schmelzpunktes beobachtet, deren  $\overline{\Delta H^2}$ -Wert kleiner als im kristallin-flüssigen Zustand ist. Durch einen Drehversuch wurde nachgewiesen, daß in dieser Phase eine regellose Verteilung der Moleküle vorliegt. Unter der Annahme, daß sich beim Erstarren der Substanz die innere Molekülkonfiguration zunächst nur wenig ändert, kann das Auftreten der Zwischenphase erklärt werden.

Bei der Untersuchung der ersten sieben Homologen der Reihe der Azoxy-phenol-di-p-n-alkylläther<sup>1)2)</sup>



war aufgefallen<sup>3)</sup>, daß das Verhalten des Amylläthers (Pentoxy-azoxybenzol) von dem der übrigen Glieder der Reihe insofern abweicht, als sein mittleres 2.Moment  $\overline{\Delta H^2}$ <sup>4)</sup> unterhalb des Schmelzpunktes zunächst kleiner als im flüssigen Zustand ist, und erst bei etwa 62,5 °C einen wesentlich größeren Wert annimmt. Bei allen anderen untersuchten Substanzen ist der Übergang vom kristallin-flüssigen zum festen Zustand mit einer sprunghaften Zunahme des mittleren 2. Momentes verbunden.

Mit dem in <sup>5)</sup> beschriebenen Kernresonanzspektrometer wurde nun diese Zwischenphase des Amylläthers, die man nur bei Abkühlung aus dem kristallin-flüssigen Zustand erhält, einer genaueren Untersuchung unterzogen, wobei der in Abb. 1 gezeigte Temperaturverlauf von  $\overline{\Delta H^2}$  festgestellt wurde.

<sup>1)</sup> K.-H. Weber, Disc. Faraday Soc. **25**, 74 (1958).

<sup>2)</sup> K.-H. Weber, Ann. Physik (7) **3**, 1 (1959).

<sup>3)</sup> K.-H. Weber u. H. Lippmann, Ann. Physik (6), **20**, 265 (1957).

<sup>4)</sup> Van Vleck, Physic. Rev. **74**, 1168 (1949).

<sup>5)</sup> H. Lippmann, Dissertation, Leipzig 1957.



Die Übergänge bei 62,5 °C und 75 °C erfolgen sprunghaft innerhalb eines Temperaturbereiches von etwa 0,5°, so daß ihr genauer Verlauf nicht registriert werden konnte, da die Temperaturinkonstanz über das Probenvolumen von derselben Größenordnung ist.

In der sogenannten Zwischenphase, die sich äußerlich durch ihr wachsartiges Aussehen von einer normalen kristallinen Probe unterscheidet, besitzt  $\overline{\Delta H^2}$  den Wert  $(2,81 \pm 0,14) G^2$  und liegt damit um etwa 1  $G^2$  niedriger als in der kristallin-flüssigen Phase am Schmelzpunkt. Eine befriedigende Erklärung

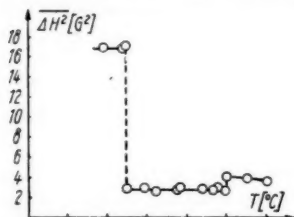


Abb. 1. Temperaturabhängigkeit von  $\overline{\Delta H^2}$  bei Pentoxy-azobenzol

Rotationen noch nicht völlig eingefroren sein. Nach einer privaten Mitteilung von Herrn Dr. K.-H. Weber sollte sich die Abnahme des mittleren 2. Momentes am Schmelzpunkt in folgender Weise erklären lassen:

In <sup>6)</sup> wurde für kristallin-flüssige Phasen die Beziehung

$$\overline{\Delta H^2} = \mu_L S^2 M$$

abgeleitet, worin  $\mu_L$  eine Konstante ist, die nur von der inneren Molekülkonfiguration abhängt,  $S$  ist der Mikroordnungsgrad, der ein Maß für die Parallelorientierung der Moleküle innerhalb kleiner Bereiche der Probe darstellt,  $M$  ist der Makroordnungsgrad, der den Grad der Parallelordnung der Bereichsachsen zur Richtung des Magnetfeldes angibt<sup>6)</sup>.  $S$  und  $M$  sind temperaturabhängig,  $M$  wird außerdem noch von der Größe des Magnetfeldes bestimmt. Es ist nun erwiesen<sup>7)</sup>, daß in kristallin-flüssigen Phasen bei Feldern  $> 2000 G$   $M$  den Wert 4 hat, der völliger Parallelordnung der Bereichsachsen in Feldrichtung entspricht.  $S$  hat nach <sup>6)</sup> in der kristallin-flüssigen Phase am Schmelzpunkt den Wert 0,68.

Durch einen Drehversuch gemäß <sup>8)</sup> wurde nachgewiesen, daß selbst bei Einwirkung eines Magnetfeldes der Größe 11000  $G$  während der Verfestigung der Probe in der Zwischenphase eine regellose Verteilung der Moleküle bzw. gewisser Molekülgruppen vorliegt. Diesem Fall entspricht  $M = 0,8$ .

Man kann annehmen, daß in der Zwischenphase  $S \approx 1$  gilt. Diese Annahme entspricht der Auflösung der Ordnungsbereiche und einer starken Behinderung der Molekülschwankungen um Achsen senkrecht zur Moleküllängsachse und wird außerdem durch den Vergleich des Verhaltens von  $S$  beim Übergang

<sup>6)</sup> K.-H. Weber, Dissertation, Leipzig 1957.

<sup>7)</sup> W. Maier, G. Barth u. H. Wiehl, Z. Elektrochemie (58) 9, 674 (1954).

<sup>8)</sup> K.-H. Weber, Z. Naturforschung 14a, 2, 112 (1959).

nematisch-smektisch<sup>8)</sup> mit den hier behandelten Verhältnissen nahegelegt. Wäre  $S < 1$ , so müßte  $\Delta H^2$  in der Zwischenphase eine Temperaturabhängigkeit zeigen.

Setzt man weiterhin voraus, daß sich  $\mu_L$  am Schmelzpunkt wenig ändert, so erklärt sich die Abnahme von  $\Delta H^2$  aus der Abnahme des Faktors  $S^2M$  von 1,88 auf 0,80. Daß  $\Delta H^2$  in der Zwischenphase nicht den Wert  $1,6 G^2$  besitzt, wie es  $S^2M = 0,80$  entsprechen würde, liegt sicher in der Zunahme der intermolekularen Wechselwirkungen begründet, von der eine Verfestigung im allgemeinen begleitet ist.

Der Linienbreitenübergang bei  $62,5^\circ C$  ist entweder auf eine Gitterumwandlung oder auf die Behinderung innermolekularer Bewegungsfreiheitsgrade, bzw. auf das Zusammenwirken beider Veränderungen zurückzuführen.

Für die erste Möglichkeit spricht das Auftreten einer deutlich sichtbaren kristallinen Struktur der Probe im Unterschiede zum amorphen Aussehen der Substanz in der Zwischenphase. Dabei wurde beim Abkühlen eine Dichtezunahme von  $(4 \pm 3,6)\%$  gemessen, dieser Wert ist allerdings wegen des großen Fehlers recht unsicher.

Die Verminderung innerer Rotationen oder Schwingungen liefert an dem fraglichen Umwandlungspunkt wahrscheinlich keinen wesentlichen Beitrag zum mittleren 2. Moment, da sich nach Powles und Gutowsky<sup>9)10)</sup> eine solche Änderung in einem allmählichen Anstieg des mittleren 2. Momentes äußert.

Eine derartige Änderung wurde bei p-Azoxycarbonsäure-äthylester festgestellt, die sich in relativ guter Übereinstimmung mit dem Experiment als Folge der Behinderung innermolekularer Rotationen erklären läßt. Dabei wächst das mittlere 2. Moment zwischen  $35^\circ C$  und  $20^\circ C$  stetig von  $4,15 G^2$  auf einen Wert von  $8,58 G^2$  (s. hierzu Abb. 2).

Für gefällige Unterstützung und viele fördernde Hinweise bei der Anfertigung meiner Diplomarbeit, von der diese Note einen Auszug bildet, möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Löschke und Herrn Dr. K.-H. Weber herzlich danken.

<sup>9)</sup> J. G. Powles, H. S. Gutowsky, J. chem. Physik **21**, 1695 u. 1704 (1953).

<sup>10)</sup> J. G. Powles, H. S. Gutowsky, J. chem. Physics **23**, 1692 (1955).

Leipzig, Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 7. Dezember 1959.

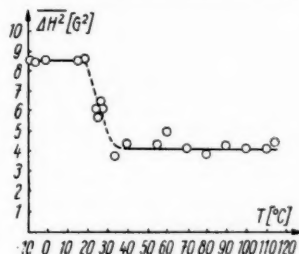


Abb. 2. Temperaturabhängigkeit von  $\Delta H^2$  bei p-Azoxycarbonsäure-äthylester

# **Über den Zusammenhang der stehenden und laufenden Schichten in der positiven Säule von Glimmentladungen**

Von Sigismund Pfau und Alfred Rutscher

Mit 8 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Bei der Untersuchung der Schichtungserscheinungen von Niederdruckentladungen in Molekülgasen, in denen gut ausgeprägt sowohl stehende als auch laufende Schichten auftreten können, werden experimentelle Hinweise für die Wesensgleichheit dieser beiden Schichtarten gefunden. Es zeigt sich, daß die frequenzabhängigen Größen der laufenden Schichten, wie z. B. Wellenlänge, Amplifikation und Gruppengeschwindigkeit bei ihrer Extrapolation auf die Frequenz Null Werte ergeben, die mit den entsprechenden, an stehenden Schichten gemessenen gut übereinstimmen. Aus den Drehspiegelaufnahmen der Zündung oder einer kurzzeitigen Störung der Entladung unter Bedingungen, die laufende und stehende Schichten ermöglichen, ist zu erkennen, daß beide Schichtarten unmittelbar ineinander übergehen können. Durch ein äußeres transversales Magnetfeld wird unter bestimmten Verhältnissen die Amplifikation der laufenden Schichten bedeutend erhöht. Das damit verbundene Ansteigen des auf Null extrapolierten Wertes bedingt eine entsprechende Ausbildung von stehenden Schichten.

## **1. Einleitung**

Die homogene positive Säule der Glimmentladung, bei der in Längsrichtung Elektronenenergie, Trägerkonzentrationen, Lichtemission u.s.w. örtlich und zeitlich konstant sind, tritt nur unter sehr beschränkten Bedingungen auf und kann heute nicht mehr als der Prototyp der Niederdrucksäule angesehen werden. In der Regel sind Schicht- und Schwingungserscheinungen zu beobachten. Diese Erscheinungen werden im wesentlichen durch die Entladung selbst und nicht durch äußere Schaltelemente bedingt. Je nachdem, ob die Schichtung gegenüber dem Entladungsrohr ruht oder nicht, unterscheidet man stehende und laufende Schichten.

Zwischen diesen beiden Schichtarten wurde lange Zeit nur eine rein äußerliche Analogie vermutet<sup>1)2)</sup>. Auch die Theorie, abgesehen von einigen Versuchen aus dem Gebiet der Plasmawellen, beschäftigte sich in der Hauptsache

<sup>1)</sup> R. Seeliger, Physik der Gasentladungen, Leipzig 1934, S. 266.

<sup>2)</sup> W. Pupp, Physik Z. **36**, 61 (1935).

jeweils nur mit einer dieser beiden Schichtarten. Erst in neuerer Zeit wird mitunter ein enger Zusammenhang zwischen stehenden und laufenden Schichten vermutet<sup>3)4)</sup>. Außer einer Arbeit von B. N. Klarfeld<sup>5)</sup>, in der beide Schichtarten ihrer Natur nach bereits als gleiche Erscheinungen aufgefaßt werden, ist jedoch keine experimentelle Untersuchung über diese Frage bekannt geworden.

Stehende Schichten treten vornehmlich bei Entladungen in Molekülgasen auf. Die Helligkeitsschwankungen sind hierbei entweder längs der Säule in Richtung Anode konstant oder in dieser Richtung gedämpft. Bei der Benutzung möglichst reiner Gase beobachtet man in der Regel nur den zweiten Fall. Allein in Wasserstoff sind auch unter reinen Bedingungen stehende Schichten möglich, die längs der Säule konstante Helligkeitsschwankungen aufweisen. In allen von uns untersuchten Fällen ließ sich die Ortsabhängigkeit der Helligkeitsschwankungen  $A$  der stehenden Schichten durch eine Exponentialfunktion darstellen. (Die positive  $x$ -Achse weist von der Kathode zur Anode.)

$$A = A_0 e^{dx}, \quad (1)$$

Der Amplifikationskoeffizient besitzt dabei Werte  $d \leq 0$ . Nur unter besonderen Bedingungen, wie später noch zu beschreiben ist, konnten wir auch in Richtung Anode verstärkte ( $d > 0$ ) stehende Schichten beobachten.

Die laufenden Schichten wurden bisher hauptsächlich nur in Edelgasentladungen beobachtet und untersucht, wo, abgesehen von einigen wenigen am Kopf der positiven Säule, keine stehenden Schichten vorkommen. Aber auch bei der Glimmentladung in Molekülgasen treten unter bestimmten Bedingungen laufende Schichten auf und gerade dadurch erscheinen diese Gase für die Untersuchung des Zusammenhanges zwischen stehenden und laufenden Schichten besonders geeignet. Die laufenden Schichten können sich (z. B. in reinen Edelgasen) von der Anode auf die Kathode zu bewegen. In Wasserstoff ist auch die umgekehrte Bewegungsrichtung möglich.

Besonders fruchtbar für die Untersuchung der laufenden Schichten erwies sich ihre künstliche Erzeugung unter Entladungsbedingungen, die keine selbsterregten Schichten zulassen. Saizew<sup>6)</sup> erzeugte solche Schichten durch Störung der Entladung mittels eines Tonfrequenzgenerators. Bei Einschalten des Generators bildeten sich in der vorher homogenen Säule laufende Schichten aus, deren Frequenz in einem gewissen Intervall gleich der Generatorfrequenz war. Pekarek<sup>7)</sup> erzeugte künstliche laufende Schichten durch kurzzeitige Störimpulse. Ein solcher Impuls pflanzt sich in der positiven Säule in Form einer Wellengruppe (Schichtungswelle) mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v^*$  (Gruppengeschwindigkeit) von der Kathode auf die Anode zu fort.

Die künstliche Erzeugung der Schichten durch eine sinusförmige Störung der Entladung zeigte, daß die Geschwindigkeit  $v$  der Schichten (Phasengeschwindigkeit) von der Frequenz  $f$  abhängt, also eine Dispersion besteht<sup>3)6)8)</sup>. Aus der gemessenen Abhängigkeit des Schichtabstandes  $l$  (Wellenlänge) von

<sup>3)</sup> K. Wojacek, Ann. Physik **2**, 68 (1958).

<sup>4)</sup> A. A. Saizew u. M. I. Wassiljewa, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **127**, 63 (1959).

<sup>5)</sup> B. N. Klarfeld, J. exp. theoret. Phys. (russ.) **22**, 66 (1952).

<sup>6)</sup> A. A. Saizew, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **79**, 779 (1951).

<sup>7)</sup> L. Pekarek, Dissertation, Moskau 1953.

<sup>8)</sup> H. Achterberg u. J. Michel, Ann. Physik **2**, 365 (1959).

der Frequenz  $f$  läßt sich obengenannte Gruppengeschwindigkeit  $v^*$  berechnen:

$$v^* = v - l \frac{dv}{dl} = -l^2 \frac{df}{dl}. \quad (2)$$

Der so erhaltene Wert stimmt mit dem direkt an Schichtungsstellen gemessen überein<sup>3)</sup>).

Die Ortsabhängigkeit der Helligkeitsschwankungen der laufenden Schichten läßt sich, abgesehen von Sättigungserscheinungen, ebenfalls durch eine Exponentialfunktion (1) darstellen<sup>3)</sup>). Die Amplifikation  $d$ , die unter anderem auch eine Funktion der Frequenz ist, kann hierbei Werte  $d \geq 0$  annehmen.

## 2. Dispersionsmessungen

Es wurde versucht, in der positiven Säule einer Glimmentladung, die selbständig nur stehende Schichten enthielt, künstlich noch zusätzlich laufende Schichten zu erzeugen. Dies gelang in der üblichen Weise durch Verwendung einer Sinusspannung (Größenordnung 10 Volt), die an eine in der Nähe des Säulenkopfes befindliche Außenelektrode gegenüber Kathode angelegt wurde. In einem bestimmten Frequenzintervall waren dann in der Entladung auch laufende Schichten zu beobachten. Abb. 1 gibt hierzu ein Beispiel. Die ungestörte Stickstoffentladung enthielt nur stehende Schichten, deren Helligkeitsschwankungen in diesem Fall längs der Säule bis zur Anode hin nahezu konstant waren. Das Drehspiegelbild bestand dann aus einer Reihe äquidistanter waagerechter Streifen. (Entladungsrohr und Drehspiegelachse senkrecht angeordnet.) Durch die sinusförmige Störung der Entladung veränderte sich dieses Bild wie Abb. 1 zeigt: Im anodenseitigen Teil der Säule waren nun laufende Schichten vorhanden, deren Wellenlänge in Abhängigkeit von der Frequenz mittels Photozellen gemessen werden konnte.

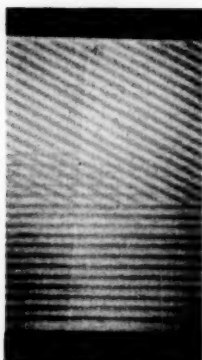


Abb. 1. Stickstoff; Rohrdurchmesser  $R = 2$  cm;  $p = 0,6$  Torr;  $I = 11,7$  mA;  $f = 3,9$  kHz; Anode oben; nach rechts zunehmende Zeit

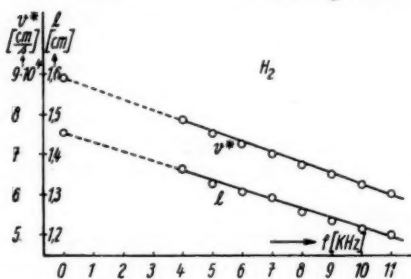


Abb. 2. Wasserstoff;  $R = 2$  cm;  $p = 1$  Torr;  $I = 12,5$  mA

Abb. 2 zeigt das Ergebnis für eine Wasserstoffentladung. Schichten mit einer Frequenz unter 4 kHz konnten nicht erzeugt werden. (Bei tieferen Frequenzen setzt Erregung durch Oberwellen ein.) Wie zu erkennen ist, läßt sich die Wellenlänge  $l$  als eine lineare Funktion der Frequenz  $f$  darstellen. Bemerkenswert ist, daß im Gegensatz z. B. zu den laufenden Schichten in Edelgasen  $l$  mit zunehmendem  $f$  abnimmt ( $dl/df < 0$ ). Dadurch erhält die Gruppengeschwindigkeit nach (2) ein positives Vorzeichen. Tatsäch-

lich zeigt sich, daß diese laufenden Schichten in Wasserstoff eine gleichgerichtete Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (von der Kathode auf die Anode zu) besitzen<sup>9)</sup>. Auch die nach Formel (2) berechnete Gruppengeschwindigkeit  $v^*$  läßt sich noch gut durch eine lineare Abhängigkeit von der Frequenz darstellen. Die direkte Messung von  $v^*$  mittels einer Schichtungsquelle ergab befriedigende Übereinstimmung mit dem berechneten Wert.

Die beiden Geraden der Abb. 2 sind auf die Frequenz Null extrapoliert worden. Es taucht die Frage auf, ob diesen so erhaltenen Werten eine reale Bedeutung zukommt. Überraschenderweise zeigt sich, daß der Schichtabstand der in der Entladung selbständig vorhandenen stehenden Schichten mit dem extrapolierten Wert sehr gut übereinstimmt. (Der eingezeichnete Kreis stellt den gemessenen Betrag dar.) Die gleiche Übereinstimmung ergibt sich ebenfalls in Stickstoff, wie aus Abb. 4 zu entnehmen ist. Aber auch die Gruppengeschwindigkeit für  $f = 0$  kann direkt an den stehenden Schichten gemessen werden. Ihr entspricht die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stehenden Schichtung in der homogenen Säule. Diese Geschwindigkeit wurde aus Zündversuchen ermittelt. Wir konnten feststellen, daß bei der Zündung einer Glimmentladung, die im nachfolgenden Zustand stehende Schichten enthält, diese Schichten ebenso

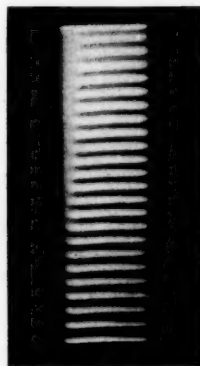


Abb. 3. Luft;  $R = 2$  cm;  $p = 0,1$  Torr;  $I = 24$  mA. Anode oben; nach rechts zunehmende Zeit

wie die laufenden zuerst an der Kathode gebildet werden, wobei die Bildung mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf die Anode zu fortschreitet. Hierüber ist bereits kurz berichtet worden<sup>10)</sup>. Abb. 3 zeigt die Drehspiegelaufnahme der Zündung einer Luftentladung. Eine einfache Methode zur Bestimmung der Ausbildungsgeschwindigkeit der Schichtung ist folgende. Man zündet und löscht die Entladung periodisch. Bei Verkleinerung der Brennzeiten beginnt schließlich die positive Säule für das unbewaffnete Auge zuerst in Nähe der Anode homogen zu werden. Tritt dies ein, so ist die Brenndauer der Entladung gleich der Zeit, die der geschichtete Zustand zum Erreichen der Anode benötigt. Für die Wasserstoffentladung der Abb. 2 ergab sich auf diese Weise ein Wert von  $8,7 \cdot 10^4$  cm/s. Der nach Formel (2) berechnete Wert (in der Abbildung als Kreis dargestellt) ist:  $8,9 \cdot 10^4$  cm/s. Aus der Aufnahme der Zündung mittels einer rotierenden Filmtrommel<sup>10)</sup> erhielten wir:  $9,7 \cdot 10^4$  cm/s. (Die Fehlermöglichkeiten sind bei der Auswertung der Aufnahme jedoch größer gewesen.) Den stehenden Schichten kommt in unserer Darstellung eine Phasengeschwindigkeit Null zu. Es zeigte sich auch in allen Fällen, daß die Phasengeschwindigkeit der laufenden Schichten mit abnehmender Frequenz kleiner wurde und ihre Extrapolation den Wert Null zuließ.

<sup>9)</sup> L. Pekarek, Czechosl. J. Phys. 8, 669 (1958).

<sup>10)</sup> S. Pfau u. A. Rutscher, Naturwissenschaften 46, 646 (1959) (wie nachträglich bekannt wurde, hat A. A. Saizew u. W. E. Mizuk — Dokl. Akad. Nauk. 119, 469 (1958) — mit einer anderen Beobachtungsmethode ähnliche Versuche ausgeführt).



## 3. Messung der Amplifikation

Eine weitere wichtige Größe der laufenden Schichten ist ihre Amplifikation  $d$ . Bei stehenden Schichten fand diese Größe bisher noch keine Anwendung. Wie wir jedoch bereits in der Einleitung erwähnten, läßt sich die Ortsabhängigkeit der Helligkeitsschwankungen auch hier durch eine Exponentialfunktion (1) darstellen. Die Amplifikation der laufenden Schichten ist frequenzabhängig

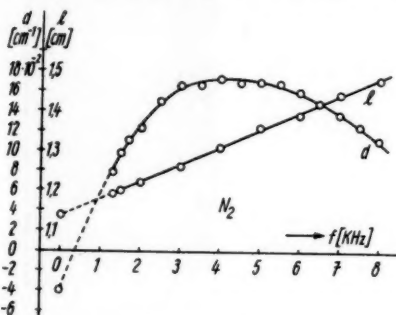


Abb. 4. Stickstoff;  $R = 2$  cm;  $p = 0,5$  Torr;  $I = 10$  mA

und besitzt bei einem bestimmten Wert (Resonanzfrequenz) ein Maximum. Abb. 4 zeigt die Verhältnisse an einer Stickstoffentladung. In dieser Entladung waren selbständig stehende Schichten mit einem  $d_0 = -4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  vorhanden. Wie die Abbildung zeigt, ist eine Extrapolation der Kurve für die laufenden Schichten auf diesen Wert durchaus möglich. Auch an anderen Entladungen in verschiedenen Gasen konnte dies bestätigt werden.

Es eröffnet sich hieraus ein, wenn auch vorerst nur rein äußerliches Verständnis für das Nichtauftreten gut ausgeprägter stehender Schichten in Edelgasentladungen. Eine Extrapolation der Amplifikationskurven ergibt bei ihnen große negative Werte für  $d_0$ . Wenn überhaupt, so sind in diesen Gasen nur außerordentlich gedämpfte stehende Schichten zu erwarten. Tatsächlich zeigen sich in Edelgasen nur am Kopf der positiven Säule einige wenige stehende Schichten, die bald in Richtung Anode wieder verschwinden.

Wenn jedoch die Amplifikation (und zugleich damit der auf Null extrapolierte Wert) auf irgendeine Weise bedeutend vergrößert werden könnte, so sollten auch in reinen Edelgasen entsprechende stehende Schichten auftreten. Wie wir feststellten, bewirkt unter bestimmten Bedingungen ein äußeres transversales Magnetfeld gerade eine solche Vergrößerung der Amplifikation. (Der Polschuhdurchmesser der benutzten Magneten betrug 10 cm.) Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit der Amplifikation  $d$  von der Stärke des Magnetfeldes bei konstanter Frequenz für eine Neonentladung. Das beachtliche Ansteigen von  $d$  zusammen mit Änderungen der Resonanzfrequenz kann eine Zunahme auch des auf die Frequenz Null extrapolierten Wertes nach sich ziehen. In der Tat konnten wir bei genügend starken Magnetfeldern in Edelgasentladungen ebenfalls stehende Schichten beobachten. Bei höheren Stromstärken sind sie zum Teil sehr gut ausgeprägt<sup>11)</sup>. Bei diesen Stromstärken

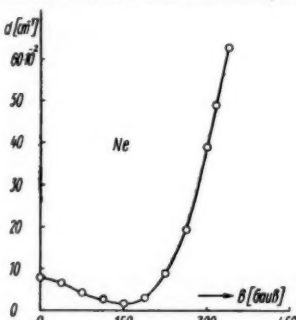


Abb. 5. Neon;  $R = 2$  cm;  $p = 1,4$  Torr;  $I = 6$  mA;  $f = 900$  Hz

<sup>11)</sup> A. Rutscher, Dissertation, Greifswald 1958; Naturwissenschaften **45**, 54 (1958).



sind dann jedoch in der Entladung gleichzeitig auch selbsterregte laufende Schichten vorhanden und es treten verwickeltere Verhältnisse auf. Nach unserer heutigen Kenntnis stellen diese stehenden Schichten im Gegensatz zu früheren Ansichten<sup>11)</sup> nicht nur eine bloße Folgeerscheinung der laufenden dar.

Auch bei Molekulgasen besitzt ein transversales Magnetfeld die Eigenschaft, eine stehende Schichtung der positiven Säule zu erzeugen. Diese Wirkung ist bereits lange bekannt. Wir haben diese Verhältnisse an einer Stickstoffentladung näher untersucht. Bei Einschalten des Magnetfeldes entstanden in der vorher homogenen Säule gut ausgeprägte stehende Schichten, die unter den gewählten Bedingungen in Richtung Anode beträchtlich verstärkt waren ( $d > 0$  im Magnetfeld). Zugleich zeigte sich, daß nun auch sinusförmige Störungen niedriger Frequenz im Magnetfeld in Richtung Anode verstärkt wurden. (Ohne Magnetfeld war für alle Frequenzen  $d < 0$ .) Allerdings bewirkten hier diese Störungen nicht mehr die Ausbildung durchgehender laufender Schichten in der Säule. Die Amplitude der Helligkeitsschwankungen wies im Abstand der stehenden Schichten Maxima auf, die exponentiell in Richtung Anode anstiegen. Zwischen den Schwingungen an Orten je zweier benachbarter Maxima bestand eine Phasenverschiebung von  $T/2$ . ( $T$ : Periode der erregenden Sinusspannung.) Abb. 6 zeigt die Frequenzabhängigkeit der Amplifikation dieser Schwingungen. Auch hier ist ein unmittelbarer Anschluß an den für die stehenden Schichten gefundenen Wert  $d_0 = 81,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  zu erkennen. Bemerkenswert ist, daß die maximale Amplifikation unter diesen Bedingungen für die Frequenz Null angenommen wird.

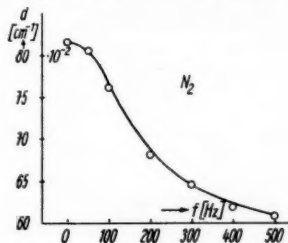


Abb. 6. Stickstoff;  $R = 2 \text{ cm}$ ;  $p = 0,5 \text{ Torr}$ ;  $I = 3,7 \text{ mA}$ ;  $B = 180 \text{ Gauß}$

Auch bei der Entladung nach Abb. 4 bewirkte ein Magnetfeld eine Vergrößerung der Amplifikation bei kleinen Frequenzen und die entsprechende Ausbildung stehender Schichten. Im feldfreien Raum zwischen dem Ende des Magnetfeldes und Anode konnte nun auch das durchbrochene Kurvenstück der Abb. 4 vermessen werden. Es ergab sich eine gute Übereinstimmung mit den extrapolierten Werten (z. B.  $f = 200 \text{ Hz}$ :  $d = -2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ ), obwohl es sich hierbei ebenfalls nicht unmittelbar um laufende Schichten handelte.

#### 4. Übergänge zwischen stehenden und laufenden Schichten

Wie aus Abb. 1 entnommen werden kann, ist es möglich, in einer positiven Säule, die bereits stehende Schichten enthält, künstlich noch zusätzlich laufende zu erzeugen, die, abgesehen von ihrer Neigung im Drehspiegel, ein ganz analoges Muster wie die stehenden ergeben. Beide Schichtarten sind dann gewöhnlich räumlich durch ein Übergangsgebiet voneinander getrennt. In diesem Übergangsgebiet zeigen die Schichten starke Helligkeitsschwankungen sowie abrupte Geschwindigkeitsänderungen. Es treten hier ähnliche Verhältnisse auf, wie oben bei der Wirkung eines transversalen Magnetfeldes beschrieben. Unter diesen Versuchsbedingungen ist es so nicht möglich, den

unmittelbaren Übergang ein und derselben individuellen Schicht aus dem bewegten in den stehenden Zustand zu beobachten. Dieses sollte jedoch bei einer zeitlichen Aufeinanderfolge beider Schichtarten, sofern es sich um die

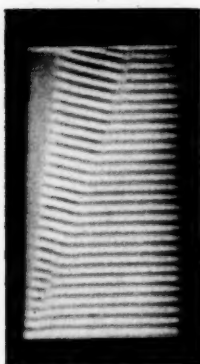


Abb. 7. Stickstoff;  
 $R = 2$  cm;  $p = 0,5$   
Torr;  $I = 12,6$  mA;  
Anode oben; nach  
rechts zunehmende  
Zeit

gleichen Erscheinungen handelt, möglich sein. Abb. 7 zeigt den Zündungsablauf einer Entladung, die im nachfolgenden Zustand stehende Schichten enthält. Im Unterschied zu Abb. 3 sind hier jedoch auch laufende Schichten mit relativ hoher Amplifikation möglich. Es bildet sich deshalb bei der Zündung unter diesen Bedingungen ebenfalls eine Pekareksche Schichtungs-

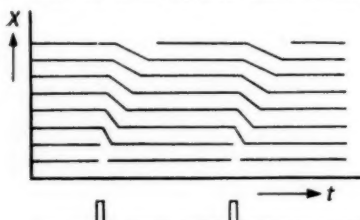


Abb. 8. Stickstoff; Anode oben; nach  
rechts zunehmende Zeit

welle aus, die entsprechend der in ihr enthaltenen Frequenzen  $f > 0$  der Ausbildung der stehenden Schichten vorausgeht. Die Abbildung läßt erkennen, daß eine Reihe individueller Schichten unmittelbar aus den bewegten in den nachfolgenden stehenden Zustand übergehen. Daß dieses Verhalten nicht sämtliche Schichten zeigen, bedingt unter anderem der größere Abstand der Schichten in der Wellengruppe. (Zu einer größeren Frequenz gehört in Stickstoff ebenfalls eine größere Wellenlänge; siehe Abb. 4.) Die Geschwindigkeit, mit der sich der Übergang der laufenden Schichten in die stehenden fortpflanzt, beträgt hier etwa  $2,7 \cdot 10^4$  cm/s. (Der Wert wurde nach einer Eichung der Zeitachse aus Abb. 7 erhalten.) Die Dispersionsmessungen ergaben nach Formel (2) für die Frequenz Null:  $v = 2,4 \cdot 10^4$  cm/s.

Einen analogen Übergang zwischen stehenden und laufenden Schichten kann man ebenfalls bei kurzzeitigen Störungen der Säule, die stationär stehende Schichten enthält, beobachten. Abb. 8 zeigt schematisch das sich ergebende Drehspiegelbild. Die Störimpulse (Abb. 8 unten) wurden ebenfalls an eine Außenelektrode gegenüber Kathode angelegt. In Wirklichkeit gehen natürlich auch hier infolge des oben genannten Grundes nicht sämtliche Schichten unmittelbar ineinander über. Auch besitzen die einzelnen Schichten, abgesehen von dem kathodenseitigen Ende der Säule, in der Wellengruppe eine nahezu einheitliche Geschwindigkeit.

## 5. Schlußbemerkungen

Die oben beschriebenen Experimente demonstrieren in augenfälliger Weise den engen Zusammenhang zwischen laufenden und stehenden Schichten. Eine umfassende Theorie der positiven Säule wird die Wesensgleichheit beider Erscheinungen berücksichtigen müssen. Hierbei scheint es vor allem auf die Untersuchung des Mechanismus der Amplifikation anzukommen. Auf diesem Wege dürfte sich dann auch z. B. ein Verständnis der Rolle von Verunreinigungen bei der Ausbildung von stehenden Schichten ergeben.

Wie  
stehende  
Säulenst  
ragende  
sieh da  
Die glei  
konstant  
Verhältnis  
Ausbildu  
Randgel  
Dieses  
zeugung  
Analogie  
keiten h  
nis die A

Wie schon länger bekannt<sup>5)</sup>, kann man ebenso wie die laufenden auch die stehenden Schichten künstlich durch eine Störung in einem vorher homogenen Säulenstück erzeugen. Eine solche Störung stellt z. B. eine in die Säule hineinragende Sonde dar. Hinter der Sonde, in Richtung auf die Anode zu, bilden sich dann, sofern die Amplifikation groß genug ist, stehende Schichten aus. Die gleiche Wirkung besitzt ein Rohransatz oder irgendeine andere zeitlich konstante lokale Störung der Säule. Bei der ungestörten Säule scheinen die Verhältnisse vor dem Säulenkopf diese Rolle zu übernehmen<sup>5)</sup>. Im Falle der Ausbildung stehender Schichten im transversalen Magnetfeld stellen die Randgebiete solche Störungen dar.

Dieses Verhalten, zusammen mit der Möglichkeit der künstlichen Erzeugung laufender Schichten durch eine periodische Störung, deutet auf eine Analogie zu den Wellenerscheinungen an der Oberfläche strömender Flüssigkeiten hin. Auch dort bewirkt z. B. ein in die Strömung eingetauchtes Hindernis die Ausbildung von Wellen, die sich relativ zum Hindernis in Ruhe befinden.

<sup>12)</sup> J. W. Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. **15**, 69 (1883).

Greifswald, Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 12. Dezember 1959.

# **Direkte Messung der einachsigen magnetischen Anisotropie aufgedampfter dünner Schichten von Eisen, Nickel, Permalloy und Kobalt<sup>1)</sup>**

Von Zdeněk Málek<sup>2)</sup> und Walter Schüppel<sup>3)</sup>

Mit 3 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Dünne Eisen-, Nickel-, Permalloy- und Kobaltschichten wurden in einem Magnetfeld auf geheizte und ungeheizte Unterlagen senkrecht oder schräg aufgedampft und die Konstanten ihrer einachsigen magnetischen Anisotropie sowie deren zeitliche Veränderung bei Zimmertemperatur mittels Drehmomentenmessungen bestimmt. Die Untersuchungen zeigen, daß die einachsige magnetische Anisotropie aus mindestens zwei Anteilen besteht, von denen der zeitlich veränderliche Anteil mit der spontanen (magnetfeldinduzierten), der zeitlich konstante mit der geometrischen Anisotropie bzw. nichtgeometrischen Spannungsanisotropie identifiziert werden kann. Durch diese Aufteilung und die Deutung der spontanen Anisotropie als einen durch Störungen hervorgerufenen Nahordnungseffekt lassen sich die experimentellen Ergebnisse weitgehend erklären.

## **1. Einleitung**

In dünnen ferromagnetischen Schichten können verschiedene Arten der Anisotropie auftreten. So ließ sich an einkristallinen Fe-Schichten aus der Bereichsstruktur eine magnetokristalline Anisotropie wie bei massivem Material nachweisen (Elschner und Unangst<sup>4)</sup>). Aber auch polykristalline Schichten sind nicht isotrop, wenn sie unter der Einwirkung eines Magnetfeldes aufgedampft werden. Die dabei auftretende einachsige Anisotropie zeigten bei Kobalt und Permalloy Blois<sup>5)</sup> und Conger<sup>6)</sup> an Hand der Unterschiedlichkeit der Hystereseschleifen in verschiedenen Richtungen, Williams und Sherwood<sup>7)</sup> an Fe, Ni, Co und deren Legierungen mit Hilfe von Bereichsstrukturuntersuchungen. Die Größe der Anisotropiekonstanten schätzten Smith<sup>8)</sup>, Olson und Pohm<sup>9)</sup>, Mitchell<sup>10)</sup> und andere Autoren unter Ver-

<sup>1)</sup> Diese Arbeit wurde am Institut für Magnetische Werkstoffe, Jena, ausgeführt.

<sup>2)</sup> Z. Málek, Physikal. Inst. d. Tschechoslowak. Akad. d. Wiss., Prag.

<sup>3)</sup> W. Schüppel, Inst. f. Magn. Werkst., Jena.

<sup>4)</sup> B. Elschner u. D. Unangst, Z. Naturforsch. **11a**, 98 (1956).

<sup>5)</sup> M. S. Blois jr., J. Appl. Phys. **26**, 975 (1955).

<sup>6)</sup> R. L. Conger, Physic. Rev. **98**, 1752 (1955).

<sup>7)</sup> H. J. Williams u. R. C. Sherwood, J. Appl. Phys. **28**, 548 (1957).

<sup>8)</sup> D. O. Smith, J. Appl. Phys. **29**, 264 (1958).

<sup>9)</sup> C. D. Olson u. A. V. Pohm, J. Appl. Phys. **29**, 274 (1958).

<sup>10)</sup> L. N. Mitchell, J. Appl. Phys. **29**, 286 (1958).

wendung der allerdings nur für Ummagnetisierung durch kohärente Drehung gültigen Beziehung für die Anisotropiefeldstärke ab. Direkte Messungen der Anisotropiekonstanten an relativ dicken ( $10^5 \text{ \AA} \dots 10^6 \text{ \AA}$ ) elektrolytisch niedergeschlagenen Fe-Schichten führte Kotel'nikov<sup>11)</sup><sup>12)</sup> aus. Über Messungen an elektrolytisch hergestellten dünnen Ni-Schichten berichteten Stemme und Andrä<sup>13)</sup>. Die Anisotropiekonstanten aufgedampfter dünner Permalloy-schichten wurden zuerst von Andrä u. a.<sup>14)</sup> direkt gemessen; Direktmessungen an aufgedampften dünnen Ni-Schichten werden in<sup>15)</sup> mitgeteilt.

Spätere Untersuchungen lassen annehmen, daß zur Entstehung dieser einachsigen magnetischen Anisotropie kein äußeres Magnetfeld erforderlich ist, diese vielmehr ihre Ursache in der spontanen Magnetisierung der Schicht hat (Spontane Anisotropie)<sup>16)</sup>.

Außer dieser Anisotropie kann bei polykristallinen Schichten durch schräges Bedampfen bzw. schrägen Einfall starker Wärmestrahlung eine einachsige magnetische Anisotropie auftreten, wie Knorr und Hoffman<sup>17)</sup> an Fe und Smith<sup>18)</sup> an Permalloy gezeigt haben und zu deren Deutung Finegan und Hoffman<sup>19)</sup> beigetragen haben (geometrische Anisotropie).

Eine einachsige magnetische Anisotropie kann außerdem entstehen, wenn beim Aufdampfen eine nichtisotrope Spannungsverteilung in der Schicht erzeugt wird. Eine solche kann durch die Unterschiedlichkeit der Ausdehnungskoeffizienten von Schicht und Unterlage bzw. durch Magnetostriktion (Blades<sup>20)</sup>) zustande kommen (nichtgeometrische Spannungsanisotropie).

Die unter der Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes entstehende einachsige magnetische Anisotropie kann auch erklärt werden, wenn man nach Wohlfarth<sup>21)</sup> annimmt, daß das ferromagnetische Material in der Schicht nicht homogen, sondern in Inseln angeordnet ist, die durch Verunreinigungen voneinander getrennt sind. Unter der Wirkung des äußeren Feldes nehmen die ferromagnetischen „Teilchen“ eine energetisch günstige, d. h. längliche Form an (Formanisotropie).

Die Konstanten der einachsigen Anisotropie erwiesen sich als zeitlich nicht konstant; sie können unter dem Einfluß eines Magnetfeldes verändert werden. Dies fanden bei höheren Temperaturen ( $> 300^\circ \text{C}$ ) Blois<sup>5)</sup> u. a.<sup>6)</sup> 7), bei  $75^\circ \text{C}$  Mitchell<sup>10)</sup>; später zeigte sich, daß derartige Veränderungen auch bei Zimmertemperatur eintreten können<sup>22)</sup><sup>23)</sup>).

<sup>11)</sup> N. V. Kotel'nikov, Dokl. Akad. nauk **113**, 97 (1957).

<sup>12)</sup> N. V. Kotel'nikov, Fiz. met. i metalloved. **6**, 222 (1958).

<sup>13)</sup> O. Stemme u. W. Andrä, Naturwiss. **46**, 352 (1959).

<sup>14)</sup> W. Andrä, Z. Málek, W. Schüppel u. O. Stemme, Naturwiss. **46**, 257 (1959).

<sup>15)</sup> W. Schüppel, Z. Málek, Naturwiss. **46**, 423 (1959).

<sup>16)</sup> W. Andrä, Z. Málek, W. Schüppel u. O. Stemme, J. Appl. Phys. **31**, 442 (1960).

<sup>17)</sup> T. G. Knorr u. R. W. Hoffman, Physic. Rev. **113**, 1039 (1959).

<sup>18)</sup> D. O. Smith, J. Appl. Phys. **30**, 264 S (1959).

<sup>19)</sup> J. D. Finegan u. R. W. Hoffman, J. Appl. Phys. **30**, 597 (1959).

<sup>20)</sup> J. D. Blades, J. Appl. Phys. **30**, 260 S (1959).

<sup>21)</sup> E. P. Wohlfarth, Private Mitteilung, 1959.

<sup>22)</sup> Z. Málek, W. Schüppel, O. Stemme u. W. Andrä, Ann. Physik (7) **5**, 211 (1960).

<sup>23)</sup> W. Andrä u. O. Stemme, Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1959, Dr.-Riederer-Verlag GmbH., Stuttgart (im Druck).

<sup>24)</sup> Z. Málek u. W. Schüppel, Berichte der Arbeitsgemeinschaft Ferromagnetismus 1959, Dr.-Riederer-Verlag GmbH., Stuttgart (im Druck).

In dieser Arbeit sollen die Ergebnisse unserer Direktmessungen der einachsigen magnetischen Anisotropie an aufgedampften dünnen Eisen-, Nickel-, Permalloy- und Kobaltschichten sowie die der Alterungsmessungen an diesen Schichten zusammenfassend mitgeteilt werden.

## 2. Ergebnisse der direkten Messung der Anisotropiekonstanten unmittelbar nach der Herstellung der Schichten

Das ferromagnetische Material wurde von elektrisch geheizten Wolframwendeln aus verdampft. Auf diese wurde es entweder in Form von Häkchen gehängt oder elektrolytisch niedergeschlagen. Letzteres hat den Vorteil, daß

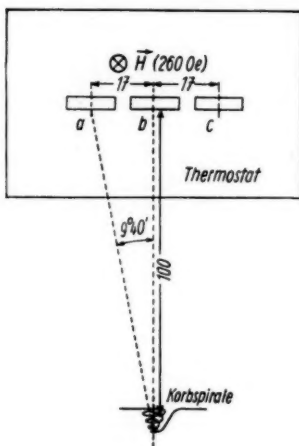


Abb. 1. Skizze der Aufdampfungsanordnung. a) Schräg bedampfte Unterlage für Anisotropiemessung; b) senkrecht bedampfte Unterlage für Anisotropiemessung; c) schräg bedampfte Unterlage für Dickenmessung

mittels Interferenzstreifenversetzung diente. (Die Dicke der stärker bedampften mittleren Schicht wurde aus der Dicke der Randschicht durch eine den geringeren Abstand zur Wendel und den unterschiedlichen Bedampfungswinkel berücksichtigende Korrektur bestimmt.) Sämtliche ferromagnetischen Schichten schützte eine unmittelbar nach der Herstellung aufgedampfte Al-Schicht vor Oxydation.

Der Druck vor dem Aufdampfen lag in der Größenordnung  $10^{-6}$  Torr. Das Aufwachsen der Schichten erfolgte mit einer Geschwindigkeit von einigen  $10 \text{ \AA/s}$ . Beim Aufdampfen wirkte ein Magnetfeld von etwa 260 Oe parallel zur Schichtebene.

Das ferromagnetische Material gleichmäßig über die Wendel verteilt ist und somit die Konzentration unter dem kritischen Wert bleibt, bei dem starke Legierungsbildung mit Wolfram einsetzt.

Die bei den ersten Versuchen verwendeten Wendeln waren schraubenförmig (Schraubenachse parallel zur Schichtebene); später benutzten wir korb förmige Wendeln, da diese einer punktförmigen Verdampfungsquelle ähnlicher sind und so definierte geometrische Verhältnisse beim Aufdampfen gewährleisten.

Als Unterlagen dienten optisch polierte kreisförmige Glasplättchen, deren Seitenflächen beim Aufdampfen abgedeckt wurden. Die Schichtoberfläche betrug  $1,54 \text{ cm}^2$ . Es wurden stets gleichzeitig drei Glasplättchen bedampft, von denen eines direkt über der Wendel, die beiden anderen symmetrisch dazu in gleicher Höhe über der Wendel in einem Thermostaten angeordnet waren (Abb. 1). Auf diese Weise traf der Dampfstrahl unter einem Winkel von annähernd  $10^\circ$  gegen das Lot auf die beiden äußeren Glasplättchen, von denen eines zur Dickenmessung

Die die in<sup>2</sup> Stelle.

Die in eine da für

Die magne bezeich

den a- Die Te

ungeh mittlen

also d verurs

lichen bereich

von K Im für die

Die Mit tropie u

Ma

Eisen Nickel Perma (77% Kobal

Alk Fe(NH auf di

Di im Mi gedam

Die S

28) 837 (15 \*

tropien in dies ein kle

Die Anisotropiekonstanten wurden mit einer Torsionsanordnung gemessen, die in<sup>25)</sup> näher beschrieben ist. Die dabei auftretenden Fehler werden an gleicher Stelle abgeschätzt. \*)

Die in diesem Kapitel beschriebenen Messungen fanden im allgemeinen in einem Zeitraum bis zu 5 Stunden nach Herstellung der Schichten statt, da für eine Messung bis zu 2 Stunden benötigt werden.

Die Ergebnisse dieser Messungen der Konstanten  $K^*$  der einachsigen magnetischen Anisotropie sind in Tab. 1 zusammengestellt. Bei den mit  $b$  bezeichneten Schichten handelt es sich um die durch nahezu senkrechtes, bei den  $a$ -Schichten um die durch schräges Bedampfen hergestellten Schichten. Die Temperatur der geheizten Unterlagen betrug 250 °C ... 300 °C, die der ungeheizten Unterlagen nicht mehr als 30 °C. Die in der Tabelle angegebene mittlere quadratische Streuung übertrifft die Grenzen der Meßfehler, wird also durch reale Unterschiede der Anisotropien bei verschiedenen Schichten verursacht. Diese Unterschiede lassen sich auch nicht aus der unterschiedlichen Dicke der Schichten erklären, denn im untersuchten Schichtdickenbereich (150 Å ... 2000 Å) ist keine eindeutige Schichtdickenabhängigkeit von  $K^*$  feststellbar.

Im folgenden sollen die in Tab. 1 mitgeteilten sowie weitere Ergebnisse für die verschiedenen Materialien getrennt betrachtet werden.

Tabelle 1

Die Mittelwerte der Konstanten  $K^*$  [ $10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ ] der einachsigen magnetischen Anisotropie und ihre mittlere Streuung. In Klammern ist die Zahl der zur Mittelbildung herangezogenen Schichten angegeben

Material	$K^*$ [ $10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ ]			
	$ub$ -Schicht	$ua$ -Schicht	$gb$ -Schicht	$ga$ -Schicht
Eisen	$6,9 \pm 1,5$ (5)	$24,6 \pm 4,5$ (5)	$7,9 \pm 2,2$ (4)	$65 \pm 33$ (4)
Nickel (99,5%)	$5,1 \pm 2,0$ (2)	$10,8 \pm 5,4$ (2)	0,2 (1)	0,89 (1)
Nickel (99,99%)	$0,5 \pm 0,2$ (5)	$6,9 \pm 1,8$ (5)	1,1 (1)	0,43 (1)
Permalloy (77%Ni)	$3,2 \pm 0,3$ (11)	$4,7 \pm 0,2$ (3)	$1,3 \pm 0,0$ (2)	$0,9 \pm 0,1$ (2)
Kobalt	$21,5 \pm 2,5$ (5)	$20,8 \pm 2,5$ (6)	$19,7 \pm 1,3$ (2)	$20,2 \pm 0,9$ (2)

### Eisen

Als Ausgangsmaterial diente Eisen, welches aus einer Lösung von 350 g/l  $\text{Fe}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2$  und 0,25 g/l  $\text{H}_2\text{SO}_4$  bei einer Stromdichte von 0,027 A/cm<sup>2</sup> auf die Wolframwendeln niedergeschlagen worden war.

Die auf geheizte Unterlagen aufgedampften Schichten ( $g$ -Schichten) weisen im Mittel eine größere Anisotropie auf als die auf ungeheizte Unterlagen aufgedampften ( $u$ -Schichten), alle  $a$ -Schichten eine größere als die  $b$ -Schichten. Die Streuung der  $K^*$ -Werte ist groß, vor allem bei den  $ga$ -Schichten.

<sup>25)</sup> W. Schüppel, O. Stemme, W. Andrä u. Z. Málek, Fiz. met. i metalloved. 8, 837 (1959).

\*) Anmerkung bei der Korrektur: Eine Wiederholung der Eichung des Anisotropiemessers ergab eine höhere Empfindlichkeit; aus diesem Grunde sind die meisten in dieser Arbeit mitgeteilten Werte von Anisotropiekonstanten mit dem Faktor 0,73, ein kleiner Teil mit einem Faktor zwischen 1,0 und 0,73 zu korrigieren.



Die Vorzugsachsen aller *a*-Proben häufen sich um die Richtung des beim Aufdampfen wirkenden Magnetfeldes; das gleiche gilt für die *b*-Schichten, doch streuen ihre Vorzugsachsen sehr stark (bis zu 85° gegen die Richtung des Magnetfeldes).

#### Nickel

Beim Aufdampfen von Nickel gingen wir von zwei verschiedenen Materialien aus. Zunächst benutzten wir technisches Nickel (99,5% Ni, einige Zehntel Prozent Mn und Mg, Spuren von Cu und Ca), später reinstes Nickel (99,99% Ni, spektroskopisch rein), beides in Form von Häkchen.

Aus Tab. 1 ersieht man, daß die Anisotropie der *u*-Schichten größer als die der *g*-Schichten ist, wobei aber die Angaben für die *g*-Schichten unsicher sind, da sie jeweils nur von einer Probe stammen. Bei den *u*-Schichten liefern die *a*-Proben für beide Materialien höhere Anisotropien als die *b*-Proben. Dies gilt in besonderem Maße für das reinste Nickel. (Hier ist der Unterschied größer als eine Größenordnung.) Allgemein scheint die Anisotropie von Reinstnickelschichten niedriger als die der Proben aus technischem Material zu sein.

Die Vorzugsachsen der *ua*-Schichten streuen um die zum Magnetfeld senkrechte Richtung, die der *ub*-Schichten um die Feldrichtung.

#### Permalloy

Das Ausgangsmaterial wurde in Häkchenform in die W-Wendeln eingehängt. Da sich die Zusammensetzung des Materials beim Verdampfen verändert, wurden in diesem Falle Analysen des aufgedampften Materials ausgeführt. Sie ergaben einen Ni-Gehalt von 77,2%, einen Fe-Gehalt von 22,4%. Außerdem konnten einige Zehntel Prozent Mn und Mo und Spuren von Zn, Cu und W nachgewiesen werden.

Die Anisotropien der unter ähnlichen Bedingungen aufgedampften Schichten weichen nur wenig von den in Tab. 1 angegebenen Richtwerten ab.

Die mittlere Lage der Vorzugsachsen stimmt mit der Richtung des Magnetfeldes überein; die Achsen der *b*-Schichten weichen weniger von dieser Richtung ab als die der *a*-Schichten.

#### Kobalt

Das zu verdampfende Material wurde aus einer Lösung von 150 g CoCl<sub>2</sub> und 180 g CaCl<sub>2</sub> pro Liter Lösung bei einer Stromdichte von 9 mA/cm<sup>2</sup> auf die Wolframwendeln abgeschieden.

Die Mittelwerte der Anisotropiekonstanten aller vier Schichtgruppen sind nahezu gleich; die Streuung der Einzelwerte ist für alle Gruppen gleich niedrig.

Die Vorzugsachsen liegen fast ausnahmslos genau in Feldrichtung.

### 3. Ergebnisse der Alterungsuntersuchungen

Wie wir in<sup>22)</sup> für Permalloy und Nickel berichtet haben, veränderten sich die unmittelbar nach der Herstellung gemessenen Anisotropien in charakteristischer Weise selbst bei Zimmertemperatur, wenn die Proben definierten Magnetfeldern ausgesetzt wurden; und zwar nahm die Größe der Anisotropiekonstanten bei Lagerung der Schichten in einem Feld parallel zur Vorzugsachse zu, bei Lagerung in einem Querfeld ab. Voraussetzung für diese Veränderungen war eine zur Sättigung der Proben ausreichende Stärke des Magnet-

feldes. Wir haben weitere Untersuchungen dieser Alterungseffekte vorgenommen und diese auch auf Eisen-, Reinstnickel- und Kobaltproben ausgedehnt.

Trägt man die  $K^*$ -Werte über dem Logarithmus der seit der Herstellung der Schichten vergangenen Zeit auf, so sind im Falle von Permalloy und Nickel die Alterungskurven in ihrem ersten Teil (bis  $t \approx 100$  h) Geraden<sup>23)</sup>. Bei Eisen und Kobalt treten jedoch auch Abweichungen von der Linearität

Tabelle 2

Die Mittelwerte des Anstiegs von  $K^*$  mit dem dekadischen Logarithmus der Zeit in Stunden  $\frac{dK^*}{d \lg(t/h)}$  [ $10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ ] und ihre mittlere Streuung. In Klammern ist die Zahl der zur Mittelung benutzten Alterungskurven angegeben. Bei den angegebenen Werten handelt es sich um den Anstieg zur Zeit  $t = 10$  h

Material	$\frac{dK^*}{d(\lg t/h)}$ [ $10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ ]			
	Ungeheizte Unterlage		Geheizte Unterlage	
	$\vec{H} \parallel \vec{V}_x$	$\vec{H} \perp \vec{V}_x$	$\vec{H} \parallel \vec{V}_x$	$\vec{H} \perp \vec{V}_x$
Eisen	$+6,8 \pm 2,0$ (5)	$-5,6 \pm 3,1$ (3)	$+0,2 \pm 0,2$ (2)	$-0,9 \pm 0,6$ (4)
Nickel (99,5%)	$+1,8$ (1)	$-1,6$ (1)	$+0,0$ (1)	—
Nickel (99,99%)	$+1,4 \pm 0,4$ (5)	—	—	$-0,0$ (1)
Permalloy (77% Ni)	$+1,8 \pm 0,2$ (2)	$-1,5 \pm 0,1$ (2)	$+0,0$ (1)	$-0,0$ (1)
Kobalt	$+5,0 \pm 1,0$ (11)	$-16,8 \pm 5,7$ (4)	$+0,2 \pm 0,2$ (2)	$-0,8 \pm 0,2$ (2)

auf. Um einen Vergleich der Größe der zeitlichen Veränderung von  $K^*$  zwischen den Schichten aus verschiedenen Materialien zu ermöglichen, ist in Tab. 2 ein mittlerer Anstieg der Kurven zur Zeit  $t = 10$  h angegeben.

In ihrem weiteren Verlauf treten bei allen Alterungskurven verschiedenartige Sättigungseffekte auf.

Alle diese Ergebnisse werden für die verschiedenen Materialien im folgenden betrachtet:

#### Eisen

Der Betrag der Anfangssteigung von  $K^*$  ist (sowohl bei den  $u$ - als auch bei den  $g$ -Schichten) bei Lagerung im Parallel- und im Querfeld unter Berücksichtigung der großen Streuung annähernd gleich. Sättigungseffekte treten schon nach weniger als 100 h auf; die gesamte zeitliche Änderung von  $K^*$  ist stets kleiner als  $10^4 \text{ erg cm}^{-3}$ . Zwei typische Kurven für parallel bzw. senkrecht zur Vorzugsachse gesättigte  $u$ -Proben sind in Abb. 2 dargestellt (Kurve 1 bzw. 2).

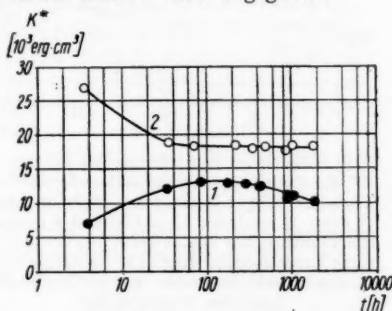


Abb. 2. Zeitliche Veränderung der Konstanten  $K^*$  der einachsigen magnetischen Anisotropie zweier schräg auf ungeheizte Unterlagen aufgedampfter Eisenproben, von denen die eine (Kurve 1) in einem Feld parallel zur Vorzugsachse, die andere (Kurve 2) in einem Feld senkrecht zur Vorzugsachse gelagert wurde

Diese zeigt auch, daß die Anisotropie der im Parallelfeld gelagerten Probe (Kurve 1) nicht ständig steigt, sondern nach dem Durchlaufen eines Maximums wieder absinkt.

Ist die Anisotropie klein, so ändert sich unter der Einwirkung eines Querfeldes nicht nur der Betrag von  $K^*$ , sondern auch die Lage der Vorzugsachse. Dieser Effekt soll bei Kobalt näher besprochen werden.

Die Anisotropiekonstanten der  $g$ -Proben verändern sich wesentlich langsamer als die der  $u$ -Proben.

### Nickel und Permalloy

Bei Permalloy und den beiden verwendeten Nickelsorten ist der Betrag der anfänglichen zeitlichen Änderung der Anisotropie für alle  $u$ -Proben bei Lagerung im Parallel- oder Querfeld annähernd gleich, und zwar kleiner als bei Eisen. Die Anisotropie der  $g$ -Schichten bleibt zeitlich konstant. Der typische Kurvenverlauf ist in<sup>22)</sup> wiedergegeben.

### Kobalt

Kobaltproben weisen ähnlich große zeitliche Anisotropieänderungen wie Eisenproben auf, doch ist bei den  $u$ -Proben die zeitliche Abnahme von  $K^*$  größer als die Zunahme und wesentlich größer als der entsprechende Wert

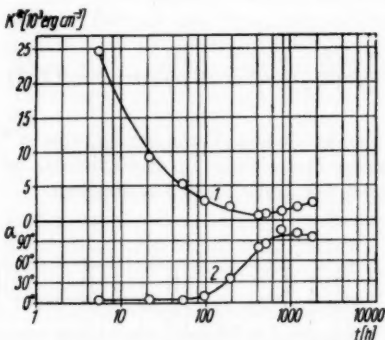


Abb. 3. Zeitliche Veränderung des Betrages  $K^*$  der einachsigen magnetischen Anisotropie einer schräg bedampften Kobaltprobe (Kurve 1) und der Lage (Winkel  $\alpha$  gegen die Richtung des Feldes beim Aufdampfen) ihrer Vorzugsachse (Kurve 2) bei Lagerung in einem Feld senkrecht zur anfänglichen Lage der Vorzugsachse

nach dem Vorzeichenwechsel<sup>24)</sup>. An Kobaltschichten wurde noch ein anderer Effekt beobachtet, den wir schon bei Eisen erwähnten. In einem Querfeld nimmt  $K^*$  nicht ganz bis auf Null ab, sondern die Vorzugsachse dreht sich aus ihrer anfänglichen Lage stetig in die Richtung des Magnetfeldes, wobei  $K^*$  einen Minimalwert größer als Null durchläuft. Ein typisches Beispiel dafür zeigt Abb. 3.

von Eisen. Ein schnelleres Absinken als Anwachsen von  $K^*$  scheint auch bei den  $g$ -Proben vorzuliegen. Diese schnellere Abnahme als Zunahme von  $K^*$  bei Kobalt zeigte sich besonders eindrucksvoll an solchen Schichten, die zunächst im Parallel-, anschließend im Querfeld aufbewahrt worden waren und bei denen trotz des späteren Beginns der Anisotropieabnahme die Neigung des zweiten Teiles der Alterungskurve dem Betrage nach mehr als viermal so groß wie die des ersten Kurventeiles war. Dies wird auch durch die  $u$ -Probe bestätigt, deren Anisotropiekonstante in einem Feld senkrecht zur Vorzugsachse so weit abnahm, daß sich ihr Vorzeichen änderte (Drehung der Vorzugsachse um  $90^\circ$ ): Die Steigung der Alterungskurve bei der Abnahme war betragsmäßig viermal so groß wie die Steigung

D  
schrä  
daß  
werd  
Anis  
Anis  
mess  
notw  
ferro  
dene  
felde  
S  
von  
bekr  
Anis  
und  
Win  
der  
legt  
diese  
daß  
um  
Neu  
Ann  
der  
Z  
rung  
Teil  
ringe  
A  
und  
ange  
bzw.  
Ähn  
scher  
der  
Zim  
Forn  
Anis  
kons  
D  
einze  
S  
senk

26  
995  
27  
28

## 4. Diskussion der Ergebnisse

Der bei einigen Materialien auftretende Anisotropieunterschied zwischen schräg und senkrecht bedampften (*a*- und *b*-) Schichten zwingt zu der Annahme, daß beim schrägen Bedampfen eine zusätzliche einachsige Anisotropie erzeugt werden kann. Diese bei Eisen und Permalloy schon von anderen<sup>17) 18)</sup> gefundene Anisotropieart werden wir nach Knorr und Hoffman als geometrische Anisotropie bezeichnen. Die Ergebnisse der durchgeführten Alterungsmessungen an Eisen-, Nickel-, Permalloy- und Kobaltschichten machen es notwendig, die gesamte einachsige magnetische Anisotropie aufgedampfter ferromagnetischer dünner Schichten in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen sich die eine bei Zimmertemperatur unter dem Einfluß eines Magnetfeldes verändert, die andere jedoch konstant bleibt.

Stellt man sich, wie schon in<sup>23)</sup> angedeutet und durch die Untersuchungen von Heidenreich, Nesbitt und Burbank<sup>26) 27)</sup> sowie Andrá und Stemme<sup>28)</sup> bekräftigt wurde, vor, daß die Ursache der eingangs erwähnten spontanen Anisotropie in einer Wechselwirkung zwischen den ferromagnetischen Atomen und Störungen besteht, wobei die Wechselwirkungsenergie pro Paar vom Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Partner und der Richtung der spontanen Magnetisierung abhängt (die durch ein äußeres Feld festgelegt wird), so läßt sich die veränderliche Komponente der Anisotropie mit dieser spontanen Anisotropie identifizieren. Es ist nur notwendig anzunehmen, daß die Beweglichkeit der Störungen schon bei Zimmertemperatur ausreicht, um bei einer Änderung der Richtung der spontanen Magnetisierung eine Neuorientierung der Paare in diese neue Richtung zu ermöglichen. Aus dieser Annahme folgt dann auch, daß der Betrag der spontanen Anisotropie im Laufe der Zeit ständig abnehmen muß, da bei hinreichender Beweglichkeit der Störungen diese zum Teil sich an energetisch günstigen Stellen ausscheiden, zum Teil aus der Schicht diffundieren, ihre Zahl im Gitter sich also ständig verringern wird.

Als Ursache der geometrischen Anisotropie bei Eisen werden von Knorr und Hoffman<sup>17)</sup> eine Fasertextur und eine anisotrope Spannungsverteilung angegeben, die sich nach den Beobachtungen von Evans und Wilman<sup>28)</sup> bzw. Finegan und Hoffman<sup>19)</sup> bei schrägem Bedampfen ausbilden können. Ähnliche geometrische Anisotropien könnten auch bei anderen ferromagnetischen Stoffen auftreten. Alle diese struktur- bzw. spannungsbedingten Arten der einachsigen magnetischen Anisotropie dürften durch Magnetfelder bei Zimmertemperatur kaum beeinflußt werden. Das gleiche ist von den anderen Formen der Spannungsanisotropie zu erwarten. Es liegt also nahe, geometrische Anisotropie und (nichtgeometrische) Spannungsanisotropie mit der gefundenen konstanten Komponente der einachsigen Anisotropie gleichzusetzen.

Die Aufteilung der einachsigen Gesamtanisotropie ist spezifisch für die einzelnen Materialien:

So läßt der große Unterschied zwischen den Anisotropien von schräg und senkrecht bedampften (*a*- und *b*-) Schichten bei Eisen auf eine große geo-

<sup>26)</sup> R. D. Heidenreich, E. A. Nesbitt u. R. D. Burbank, J. Appl. Phys. **30**, 995 (1959).

<sup>27)</sup> E. A. Nesbitt u. R. D. Heidenreich, J. Appl. Phys. **30**, 1000 (1959).

<sup>28)</sup> D. M. Evans u. H. Wilman, Acta Cryst. **5**, 731 (1952).

metrische Anisotropie schließen. Dies bestätigten auch die Alterungsmessungen, die zeigten, daß der Betrag der gesamten zeitlichen Veränderung von  $K^*$  stets kleiner als  $10^4 \text{ erg cm}^{-3}$  bleibt; dieser Wert stellt also eine obere Grenze für die Konstante der spontanen Anisotropie dar und entspricht dem  $K^*$ -Mittel der  $b$ -Schichten. Andererseits entspricht der Unterschied zwischen den Werten der Anisotropiekonstanten von  $a$ - und  $b$ -Schichten, einige  $10^4 \text{ erg cm}^{-3}$ , größenordnungsmäßig dem von Knorr und Hoffman<sup>17)</sup> unter ähnlichen Bedingungen (d. h. beim Bedampfen unter einem Winkel von  $10^\circ$  gegen das Lot) gefundenen Wert der Konstanten der geometrischen Anisotropie. Da die Vorzugsachse der geometrischen Anisotropie senkrecht zur Aufdampfungsrichtung, d. h. in unserer Anordnung (s. Abb. 1) in Richtung des Magnetfeldes liegt, so muß auch die Vorzugsachse der Gesamtanisotropie diese Richtung besitzen, was mit unseren Experimenten übereinstimmt. Die größere Streuung der Vorzugsachsen der  $b$ -Schichten um diese Lage läßt sich auf die Abweichungen der benutzten Verdampfungsquelle von der Punktform zurückführen, die sich bei nahezu senkrechtem Bedampfen kritischer als beim schrägen Bedampfen auswirken.

Der Unterschied zwischen den Anisotropiekonstanten von  $ua$ - und  $ub$ -Schichten, d. h. die Konstante der geometrischen Anisotropie, ist bei den zwei benutzten Nickelsorten von der gleichen Größenordnung ( $5 \cdot 10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ ). Die größere Gesamtanisotropie bei technischem Nickel wird also durch eine größere spontane Anisotropie bewirkt, was auf vermehrten Einbau von Störatomen zurückgeführt werden kann.

Da die Anisotropiekonstanten der Permalloy- $ua$ -Schichten nur wenig größer als die der  $ub$ -Schichten sind, muß die geometrische Anisotropie bei Permalloy klein sein.

Vergleicht man die gefundenen Größen der geometrischen Anisotropie von Eisen-, Nickel- und Permalloy-Schichten, so verhalten sich diese näherungsweise wie die Konstanten  $K_1$  der Kristallanisotropie dieser Materialien. Dies würde exakt dann der Fall sein, wenn sich beim schrägen Bedampfen keine anisotrope Spannungsverteilung in den Schichten ausbilden würde und die Textur bei allen Materialien die gleiche wäre. Die gefundene näherungsweise Übereinstimmung deutet also darauf hin, daß die durch Spannungen erzeugte geometrische Anisotropie kleiner als die auf Textur beruhende ist.

Im Gegensatz zu Eisen-, Nickel- und Permalloyschichten ist die geometrische Anisotropie der Kobaltschichten relativ klein; denn die  $K^*$ -Mittelwerte der  $a$ - und  $b$ -Schichten sind nahezu gleich; auch stimmen trotz der gleichen Aufdampfbedingungen wie bei Eisen die Vorzugsachsen selbst der  $b$ -Schichten fast ausnahmslos mit der Feldrichtung überein. An Hand der weiter vorn erwähnten, in<sup>24)</sup> näher beschriebenen und in Abb. 3 dargestellten Drehung der Vorzugsachse einer Kobaltschicht bei Lagerung im Querfeld kann die Konstante der zeitlich unveränderlichen  $K^*$ -Komponente für den Fall, daß deren Vorzugsachse weder parallel noch senkrecht zur Achse der spontanen Anisotropie liegt, zu  $\approx 1 \cdot 10^3 \text{ erg cm}^{-3}$ , d. h.  $\approx 5\%$  der Gesamtanisotropiekonstante, abgeschätzt werden. Für das Fehlen einer geometrischen Anisotropie spricht auch das Ergebnis der in<sup>7)</sup> mitgeteilten Untersuchungen von Read, die an Kobaltschichten keine Textur nachweisen konnte.

Lassen sich durch die Zerlegung der einachsigen magnetischen Anisotropie in geometrische Anisotropie und spontane Anisotropie bzw. (nichtgeometrische)

Spannungsanisotropie die Unterschiede zwischen den  $K^*$ -Werten von  $a$ - und  $b$ -Schichten hinreichend erklären, so kann für die Unterschiede zwischen  $u$ - und  $g$ -Schichten keine allgemein gültige Deutung gegeben werden. Die an allen Materialien beobachtete wesentlich geringere zeitliche Änderung von  $K^*$  bei  $g$ -Proben scheint auf eine geringere Beweglichkeit der Störungen in den  $g$ -Schichten zurückgeführt werden zu können. Die bei den meisten Proben beobachtete ständige Abnahme des Betrages der anfänglichen Steigung der Alterungskurven, deren Einmündung in eine Sättigung und das bei einigen Proben gefundene Absinken von  $K^*$  nach Durchlaufen eines Maximums läßt sich erklären durch die Verringerung der Zahl der Störungen im Laufe der Zeit, wie sie aus unserer Deutung der spontanen Anisotropie folgt. Wegen der geringeren Beweglichkeit der Störungen in  $g$ -Schichten sind bei diesen Sättigungseffekte erst nach längerer Zeit zu erwarten, was mit der beobachteten Linearität der Alterungskurven in Einklang steht.

Aus der Deutung der spontanen Anisotropie als Nahordnungseffekt folgt, daß ihre Größe für ein bestimmtes Material und eine bestimmte Art von Störungen nur von deren Zahl pro Volumeneinheit abhängt. Die spontane Anisotropie sollte also, worauf Andrä<sup>23)</sup> zuerst hinwies, keine typische Eigenschaft der dünnen Schichten sein, sondern in allen Stoffen mit gleicher Störungskonzentration auftreten. Daraus erklärt sich die bei sämtlichen Materialien fehlende Schichtdickenabhängigkeit von  $K^*$ .

Fräulein Chr. Hermann hat eine große Zahl der langwierigen Anisotropiemessungen sorgfältig ausgeführt. Wir möchten ihr dafür recht herzlich Dank sagen.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin und

Prag, Physikalisches Institut der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 16. Dezember 1959.



# ***Streuung von Elektronenstrahlen an neutralen Atomen für verschiedene Thomas-Fermische Potentiale***

Von T. Tietz

## **Inhaltsübersicht**

In dieser Arbeit leiten wir sowohl exakte als auch angenäherte Ausdrücke für die elastischen differentiellen Streuquerschnitte bei verschiedenen Thomas-Fermischen Atompotentialen ab. Unsere numerischen Resultate für die elastischen differentiellen Streuquerschnitte werden mit den entsprechenden Hartreeschen Werten verglichen.

Für die potentielle Energie  $V(r)$  des Elektrons in neutralen Atomen werden in der statistischen Theorie von Thomas und Fermi verschiedene Ausdrücke verwendet, die wir hier besprechen wollen. Für ein neutrales Atom mit der Ordnungszahl  $Z$  können wir die potentielle Energie  $V(r)$  des Elektrons wie folgt schreiben:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} f(x), \quad (1a)$$

$$V(r) = -\frac{(Z-1)e^2}{r} f(x) - \frac{e^2}{r}, \quad (1b)$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} f(x) \quad \text{für} \quad \frac{Ze^2}{r} f(x) \geq \frac{e^2}{r} \quad (1c)$$

und

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad \text{für} \quad \frac{Ze^2}{r} f(x) \leq \frac{e^2}{r}.$$

Diese drei Ausdrücke wurden von Latter<sup>1)</sup> sehr genau untersucht und die Eigenwerte mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung numerisch berechnet. Ein Vergleich der numerisch berechneten Eigenwerte von Latter mit den entsprechenden experimentellen sowie auch den Hartreeschen Ergebnissen zeigt, daß der Ausdruck (1c) für  $V(r)$  die besten Resultate für die Eigenwerte liefert. Der Ausdruck (1a) für  $V(r)$  führt zur Schwierigkeit bei höheren Quantenzahlen und der Ausdruck (1b) gibt zu hohe Eigenwerte.

In dieser Arbeit wollen wir die drei Ausdrücke für  $V(r)$  untersuchen. Wir werden mit Hilfe von (1a), (1b) und (1c) den differentiellen Streuquerschnitt berechnen und mit den entsprechenden Werten von Hartree vergleichen. In den Formeln (1a), (1b) und (1c) schreiben wir für die Entfernung vom

<sup>1)</sup> R. Latter, Physic. Rev. **99**, 510 (1955). Eine ausführliche Besprechung von (1a) und (1b) findet man in P. Gombás, Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien Springer-Verlag 1949.



Kern  $r$  die Fermische dimensionslose Variable  $x$ :

$$x = 2^{1/2} 3^{-1/2} \pi^{1/2} m e^2 h^{-2} Z^{1/2} r = r/\mu. \quad (2)$$

In (1a), (1b), (1c) und (2) bezeichnet  $e$  die positive Elementarladung,  $m$  die Masse des Elektrons und  $h$  die Plancksche Konstante.

In dem Ausdruck (1b) ist für  $\mu$  der Wert einzusetzen, der der Ordnungszahl  $(Z - 1)$  entspricht. In den Formeln (1a), (1b) und (1c) bezeichnet  $f(x)$  die Thomas-Fermische Funktion des freien neutralen Atoms, welche durch folgende D.-Gl. gegeben ist:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f^{3/2}(x)/x^{1/2}. \quad (3)$$

$f(x)$  muß folgende Randbedingungen erfüllen

$$f(0) = 1 \text{ und } f(\infty) = 0. \quad (4)$$

Die Streuamplitude  $f(\vartheta)$  läßt sich wie folgt schreiben

$$f(\vartheta) = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{Kr} V(r) r^2 dr, \quad (5)$$

worin

$$K = 4\pi \left( \sin \frac{1}{2} \vartheta \right) / \lambda, \text{ mit } \lambda = h/mv. \quad (6)$$

$\lambda$  bedeutet die Wellenlänge der Materiewelle der Elektronenstrahlen,  $v$  die Elektronengeschwindigkeit und  $\vartheta$  ist der Winkelabstand zwischen Primärstrahl und gestreutem Strahl. Für das Quadrat der Streuamplitude, d. h. für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2$  bekommen wir mit den Ausdrücken (1a), (1b) und (1c)

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} h^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{1/2} e^2 m p} \int_0^\infty f(x) \sin px dx \right]^2, \quad (7a)$$

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} h^2 (Z-1)^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{1/2} e^2 m p} \int_0^\infty f(x) \sin px dx + \frac{3^{1/2} h^2}{2^{17/2} \pi^{1/2} e^2 m (Z-1)^{1/2} p} \int_0^\infty \sin px dx \right]^2, \quad (7b)$$

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} h^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{1/2} e^2 m p} \int_0^{x_0} f(x) \sin px dx + \frac{3^{1/2} h^2}{2^{17/2} \pi^{1/2} e^2 m Z^{1/2} p x_0} \int_0^\infty \sin px dx \right]^2. \quad (7c)$$

In diesen letzten Formeln ist  $p$  gegeben durch

$$p = \frac{3^{1/2} h v \sin \frac{1}{2} \vartheta}{2^{7/2} \pi^{1/2} e^2 Z^{1/2}} = \frac{3^{1/2} h^2 \sin \frac{1}{2} \vartheta}{2^{7/2} \pi^{1/2} e^2 m Z^{1/2} \lambda}. \quad (8)$$

<sup>2)</sup> N. F. Mott u. H. S. Massey, The Theory of Atomic Collisions. Oxford 1950.

In (7b) ist für  $p$  der Ausdruck (8) einzusetzen, der der Ordnungszahl  $(Z-1)$  entspricht. Die zweiten Integrale in den Formeln (7b) und (8b) können wir leicht berechnen, wenn wir beachten, daß

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin p x dx = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-dx} \sin p x dx. \quad (9)$$

Für  $I(\vartheta)$  ergeben sich folgende Endformeln:

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} h^2 (Z-1)^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m p} \int_0^{\infty} f(x) \sin p x dx + \frac{3^{1/2} h^2}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m (Z-1)^{1/2} p^2} \right]^2 \quad (10b)$$

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} h^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m p} \int_0^{x_0} f(x) \sin p x dx + \frac{3^{1/2} h^2 \cos p x_0}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m Z^{1/2} p^2} \right]^2. \quad (10c)$$

Für die exakte Thomas-Fermi-Funktion des freien neutralen Atoms kann man die Integrale, welche in den Endformeln für  $I(\vartheta)$ , Gln. (7a), (10b) und (10c), auftreten, nur numerisch berechnen. Die exakten  $x_0$ -Werte sind durch die Beziehung  $f(x_0) = 1/Z$  gegeben, welche aus (1c) folgt. In Tab. 1 sind die berechneten exakten  $x_0$ -Werte für alle Ordnungszahlen  $Z$  angegeben. Die Berechnung wurde mit Hilfe der exakten Tabellen von Kobayashi und Taima<sup>3)</sup> für die Thomas-Fermische Funktion des freien neutralen Atoms durchgeführt.

Tabelle 1  
Die  $x_0$ -Werte für verschiedene Ordnungszahlen  $Z$

$Z$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_0$	0,7566	1,3977	1,9422	2,4019	2,8464	3,2356	3,5943	3,9281	4,2420
$Z$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$x_0$	4,5363	4,8156	5,0817	5,3359	5,5792	5,8130	6,0384	6,2558	6,4659
$Z$	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$x_0$	6,6695	6,8669	7,0587	7,2452	7,4267	7,6035	7,7764	7,9455	8,1100
$Z$	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$x_0$	8,2713	8,4342	8,5824	8,7355	8,8841	9,0332	9,1734	9,3141	9,4525
$Z$	38	39	40	41	42	43	44	45	46
$x_0$	9,5884	9,7223	9,8542	9,9837	10,1132	10,2374	10,3641	10,4840	10,6059
$Z$	47	48	49	50	51	52	52	54	55
$x_0$	10,7238	10,8420	10,9572	11,0725	11,1849	11,2961	11,4070	11,5146	11,6237
$Z$	56	57	58	59	60	61	62	63	64
$x_0$	11,7289	11,8352	11,9392	12,0414	12,1443	12,2438	12,3441	12,4432	12,5406
$Z$	65	66	67	68	69	70	71	72	73
$x_0$	12,6382	12,7329	12,8293	12,9232	13,0154	13,1090	13,1998	13,2905	13,3810
$Z$	74	75	76	77	78	79	80	81	82
$x_0$	13,4690	13,5582	13,6461	13,7319	13,8187	13,9049	13,9884	14,0735	14,1576
$Z$	83	84	85	86	87	88	89	90	91
$x_0$	14,2394	14,3224	14,4048	14,4843	14,5656	14,6452	14,7248	14,8028	14,8814
$Z$	92								
$x_0$	14,9581								

<sup>3)</sup> S. Kobayashi u. T. Taima, Mem. Fac. Liberal Arts Educ. Kagawa Univ, Part. II, No. 33, 1957.

Um genaue Werte für  $I(\vartheta)$  zu bekommen, muß man die entsprechenden Integrale numerisch berechnen. Allerdings ist die Berechnung von  $I(\vartheta)$  mit einer Rechenarbeit verbunden, die nur mit Maschinen bewältigt werden kann. Außerdem ist es in einigen Fällen von Nachteil, daß man für  $I(\vartheta)$  keine analytischen Ausdrücke sondern numerische Tabellen erhält. Einen Überblick über  $I(\vartheta)$  bekommt man, wenn man für die Thomas-Fermische Funktion  $f(x)$  die Approximation von Rozental<sup>4)</sup> benutzt:

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 c_i e^{-b_i x}. \quad (11)$$

Die Konstanten  $c_i$  und  $b_i$  haben folgende Werte:  $c_1 = 0,255$ ,  $c_2 = 0,581$ ,  $c_3 = 0,164$ ,  $b_1 = 0,246$ ,  $b_2 = 0,947$ ,  $b_3 = 4,356$ . Die Genauigkeit der Rozental-schen Approximation für Streuungen von Elektronen hat der Autor dieser Arbeit schon früher betrachtet<sup>5)</sup>. Diese Approximation hat den Vorteil, daß man die hier vorkommende Integrale analytisch berechnen kann. Setzt man die Rozentalsche Approximation in die Formeln (7a), (10b) und (10c) ein, so bekommt man für  $I(\vartheta)$  folgende Näherungslösungen:

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} \hbar^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m} \left( \frac{c_1}{p^2 + b_1^2} + \frac{c_2}{p^2 + b_2^2} + \frac{c_3}{p^2 + b_3^2} \right) \right]^2 \quad (12a)$$

$$I(\vartheta) = \left[ \frac{3^{1/2} \hbar^2 (Z-1)^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m} \left( \frac{c_1}{p^2 + b_1^2} + \frac{c_2}{p^2 + b_2^2} + \frac{c_3}{p^2 + b_3^2} \right) + \frac{3^{1/2} \hbar^2}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m (Z-1)^{1/2} p^2} \right]^2 \quad (12b)$$

$$I(\vartheta) = \left[ - \frac{3^{1/2} \hbar^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m p} \left( \frac{c_1 e^{-b_1 x_0} (b_1 \sin p x_0 + p \cos p x_0)}{p^2 + b_1^2} + \frac{c_2 e^{-b_2 x_0} (b_2 \sin p x_0 + p \cos p x_0)}{p^2 + b_2^2} + \frac{c_3 e^{-b_3 x_0} (b_3 \sin p x_0 + p \cos p x_0)}{p^2 + b_3^2} \right) + \frac{3^{1/2} \hbar^2 Z^{1/2}}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m} \left( \frac{c_1}{p^2 + b_1^2} + \frac{c_2}{p^2 + b_2^2} + \frac{c_3}{p^2 + b_3^2} \right) + \frac{3^{1/2} \hbar^2 \cos p x_0}{2^{17/2} \pi^{3/2} e^2 m Z^{1/2} p^2} \right]^2 \quad (12c)$$

Tab. 2 gibt einen Vergleich der differentiellen Streuquerschnitte Gl. (12a), (12b), (12c) mit den entsprechenden numerischen Hartreeschen Werten für  $I(\vartheta)$ . Der Vergleich gilt für Cl ( $Z = 17$ ).  $I(\vartheta)$  ist in Einheiten<sup>6)</sup>  $5,66 \cdot 10^{-20}$  angegeben.

Tab. 2 zeigt, daß Gl. (12b) für den elastischen differentiellen Streuquerschnitt  $I(\vartheta)$  zu große Werte ergibt. Die Gl. (12a) und (12c) geben bessere Resultate. Für sehr kleine Werte von  $(\sin \frac{1}{2} \vartheta)/\lambda$  gibt (12a) die besten Werte und für größere Werte von  $(\sin \frac{1}{2} \vartheta)/\lambda$  sind die Werte von (12c) besser den Hartreeschen Werten angepaßt.

<sup>4)</sup> S. Rozental, Z. Physik **41**, 81 (1936).

<sup>5)</sup> T. Tietz, Physic. Rev. **113**, 1056 (1959).

<sup>6)</sup> Man vergleiche hierzu (2).

Tabelle 2  
Vergleich der nach verschiedenen Methoden verhaltenen differentiellen elastischen Streuquerschnitte  $I(\theta)$  in Einheiten  $5,66 \cdot 10^{-20}$

$\frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\lambda} 10^{-8}$	0,1	0,2	0,3	0,4
Gl. (12a)	66600	17540	6683	3154
Gl. (12b)	122258	23083	7972	3579
Gl. (12c)	73723	15156	6820	3319
$I(\theta)$ Hartree	57600	23083	7972	3579

$\frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\lambda} 10^{-8}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
Gl. (12a)	1684	970	595	384	258	179	129
Gl. (12b)	1850	1048	634	405	270	188	134
Gl. (12c)	1649	924	598	384	259	178	128
$I(\theta)$ Hartree	1520	850	530	346	243	173	125

Herrn Prof. Dr. P. Gombás danke ich dafür, daß ich die Untersuchungen in seinem Institute durchführen durfte.

Die numerischen Rechnungen wurden von J. Vaczó und J. Ányos durchgeführt, wofür ich ihnen meinen Dank ausspreche.

Łódź (Polen), Universität Łódź, Institut der Theoretischen Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. Februar 1960.

## Zur Theorie der Kernspaltung. I

### Die Kernkraftwechselwirkung zwischen den Bruchstücken

Von Witlof Brunner und Harry Paul

Mit 7 Abbildungen

#### Inhaltsübersicht

Die Fong-Newton'sche Theorie der Kernspaltung wird durch die explizite Berücksichtigung der Kernkräfte, die zwischen den Spaltstücken auch noch nach ihrer Trennung wirksam sind, modifiziert. Der Spaltungsprozeß erfolgt über ein virtuelles Niveau des Zweiteilchen-Systems der beiden Fragmente, dessen Höhe aus den experimentell bekannten Werten der mittleren kinetischen Energie der Bruchstücke bestimmt wird. Die relative Spaltungswahrscheinlichkeit wird mit der Durchdringungswahrscheinlichkeit der durch das Zusammenspiel von Kernkraft und Coulombkraft entstehenden Potentialschwelle identifiziert. Durch die Forderung, daß die Theorie die bei der Spaltung auftretende Massenverteilung reproduziert, wird die Größe der Kernkraftwechselwirkung festgelegt. Die so erhaltenen Werte liegen in der zu erwartenden Größenordnung, ihre Variation mit dem Verhältnis der Massen der beiden Bruchstücke scheint mit der Herausbildung abgeschlossener Schalen in den Fragmenten in Verbindung zu stehen.

#### Einleitung

Experimentell bekannt ist, daß die bei der Kernspaltung auftretenden Massenwahrscheinlichkeiten und Energien im wesentlichen eine Funktion sowohl der Anregungsenergie als auch der Masse des Targetkerns sind. Grundlage für das Verständnis des Mechanismus der Spaltung jedoch ist eine Erklärung der sogenannten Spaltungsasymmetrie, so daß eine Theorie der Kernspaltung auch vornehmlich diese zu erklären hat. Wir werden uns im folgenden ausschließlich mit der Spaltungsasymmetrie beschäftigen, worunter folgendes zu verstehen ist: Die Häufigkeit der Spaltung wächst, vom Massenverhältnis  $m = 1$  der Bruchstücke ( $m = \frac{A_s}{A_L}$ , wenn mit  $A_s$  und  $A_L$  das Atomgewicht des schweren bzw. leichten Bruchstückes bezeichnet wird) ausgehend, auf einen Maximalwert an (der bei der Spaltung von  $U^{235}$  durch thermische Neutronen bei  $m \approx 1,45$  liegt und etwa 600 mal größer ist als der Wert für  $m = 1$ ), und fällt schließlich steil ab (Abb. 1).

Die Kurve der mittleren kinetischen Energie der Spaltstücke weist ebenfalls ein Maximum für einen von Eins verschiedenen  $m$ -Wert ( $m \approx 1,3$  für  $U^{235}$ ) auf (Abb. 2).

Am einfachsten scheint der Spaltungsvorgang im Rahmen des Tröpfchenmodells des Atomkerns erfaßbar zu sein, das auch historisch den Ausgangspunkt der Überlegungen zur Theorie der Kernspaltung bildete. Der Kern

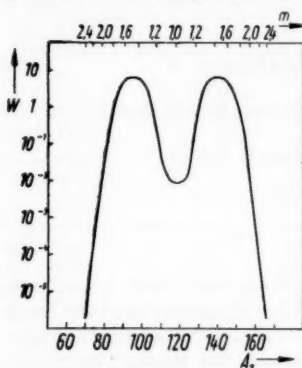


Abb. 1. Experimentelle Kurve der relativen Spaltungswahrscheinlichkeit  $W$  als Funktion des Atomgewichtes  $A_1$  eines der beiden Fragmente

stattdessen kann. Wesentlich ist seine Annahme, die Dichte dieser Zustände stimme mit der Zustandsdichte des Systems nach der Spaltung überein. Zur Berechnung von  $W$  benötigt man somit die Kenntnis der Anregungsenergien und der Niveaudichten der Bruchstücke. Fong entwickelte eine

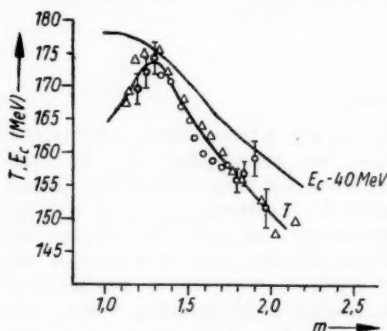


Abb. 2. Die für die Rechnung benutzten Werte der mittleren kinetischen Energie  $T$  der beiden Bruchstücke als Funktion ihres Massenverhältnisses  $m$ .  $\circ$  Meßwerte von  $T$  nach Stein<sup>1)</sup>;  $\Delta$  Meßwerte von  $T$  nach Brunton und Hanna<sup>2)</sup>. Um 40 MeV verminderte Coulombenergie  $E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}$  des Zweiteilchen-Systems der beiden Bruchstücke an der Stelle  $R$

schnüre sich bevorzugt asymmetrisch ein, daher zerfällt er meist in zwei Bruchstücke mit verschiedener Masse. Leider ergeben die Rechnungen eine größere Wahrscheinlichkeit für symmetrische als für asymmetrische Einschnürung. Man muß daher zusätzlich Vorstellungen über die Struktur des Kerns (Clusterbildungen, die zu einer „birnenförmigen“ Nukleonverteilung im Gebiet des „Sattels“ Anlaß geben, s. Inglis<sup>1)</sup>) zu Hilfe nehmen, um sich — bis jetzt nur in qualitativer Form — einem Verständnis des Vorganges der Kernspaltung zu nähern.

Ein ganz anderer Weg wurde von Fong<sup>2)</sup> durch die Einführung des „statistischen Faktors“ beschritten. Der genannte Autor setzte die relative Wahrscheinlichkeit  $W$  eines bestimmten Spaltungsprozesses gleich der Zahl der Zustände im Ausgangskern, aus denen heraus ein Zerfall in der betrachteten Weise

heraus ein Zerfall in der betrachteten Weise Formel zur Berechnung der Massen der primären Spaltprodukte (und damit auch der bei der Spaltung freigesetzten Energie), die auch den Schaleneffekten Rechnung trägt. Die Energieabhängigkeit der Niveaudichte wurde in der Form  $a \cdot e^{b\sqrt{E}}$  ( $E$  Anregungsenergie,  $a$  und  $b$  Konstante) angesetzt, wie sie die statistische Theorie des Atomkerns liefert. Die von Fong erhaltenen Anregungsenergien der Bruchstücke erweisen sich als besonders hoch für den Fall, daß letztere magischen Kernen benachbart sind. Infolge der mit zunehmender Anregungsenergie sehr stark anwachsenden Niveaudichte ist somit die Wahrscheinlich-

<sup>1)</sup> D. R. Inglis, Ann. of Phys. 5, 106 (1958).

<sup>2)</sup> P. Fong, Physic. Rev. 102, 434 (1956).

keit der Spaltungsprozesse, bei denen eines der Spaltprodukte ein Nachbar magischer Kerne ist, besonders groß. Da in diesem Fall (für  $U^{235}$ )  $m$  in der Nähe von 1,45 liegt, wäre hiermit die Bevorzugung der asymmetrischen Spaltung gegenüber der symmetrischen erklärt.

Leider ist diese Erklärung nicht stichhaltig (s. Newton<sup>3)</sup>): Fong überschätzte stark die Niveaudichte von Kernen, die in der Nähe magischer Kerne liegen. Rechnet man mit einem korrekteren Wert für die Niveaudichte, dann geht die Übereinstimmung des Fongschen Resultats mit dem experimentellen Befund verloren. (Ganz davon abgesehen, daß die Werte für die kinetische Energie der Bruchstücke auch in der Fongschen Theorie nicht mit den experimentellen Daten übereinstimmen.)

T. D. Newton<sup>3)</sup> entwickelte die Fongsche Theorie weiter, indem er — im Rahmen der Wignerschen Matrixtheorie der Kernreaktionen — den Einfluß der Coulomb-Schwelle auf die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Spaltungsprozesses mit berücksichtigte. Sein Ausgangspunkt ist die Formel für die Breite des Kanals, welcher der Spaltung eines Kerns (Atomgewicht  $A$ , Kernladungszahl  $Z$ ) in zwei Bruchstücke ( $A_1, Z_1$  und  $A_2, Z_2$ ) entspricht,

$$\Gamma = \gamma \frac{k R}{F_c^2(R) + G_c^2(R)}. \quad (1)$$

Dabei ist  $R$  der kleinste Abstand der Schwerpunkte der beiden Bruchstücke, für den diese als getrennte (d. h. nur durch elektrostatische Kräfte aufeinander einwirkende) Teilchen angesehen werden können,  $k$  die Wellenzahl der Relativbewegung der beiden Spaltstücke und  $\gamma$  die reduzierte Kanalbreite.  $F_c$  und  $G_c$  bezeichnen die reguläre bzw. irreguläre Wellenfunktion für das Coulomb-Potential.

Für die relative Wahrscheinlichkeit des Spaltungsprozesses, bei dem das Bruchstück 1 eine Anregungsenergie zwischen  $E_1$  und  $E_1 + dE_1$  und die Wellenzahl mit der Genauigkeit  $dk$  den Wert  $k$  besitzt, ergibt sich aus (1), wenn man genau wie bei Fong die Zahl der Ausgangskanäle mit der Zahl der Zustände nach der Spaltung identifiziert,

$$G(A_1, Z_1, E_1, k) dE_1 dk = \gamma(A_1, Z_1, E_1, k) \frac{k R}{F_c^2(R) + G_c^2(R)} w(A_1, Z_1, E_1) \cdot w(A_2, Z_2, E_F - E_1 - E_K) dE_1 k^2 dk. \quad (2)$$

Dabei ist  $w(A_i, Z_i, E_i)$  die Niveaudichte des Bruchstückes  $i$  ( $i = 1, 2$ ) bei der Anregung  $E_i$ ,  $E_F$  die gesamte freiwerdende Energie und  $E_K$  die kinetische Energie der Spaltstücke.

Newton nahm im weiteren  $R$  und  $\gamma$  als konstant an und benutzte für  $w$  einen Ausdruck, bei dessen Herleitung der Kern als Gas von Fermionen idealisiert wurde. Die damit aus (2) folgenden Ergebnisse sind nicht recht befriedigend: Die Wahrscheinlichkeit für symmetrische Spaltung erweist sich als größer als die für asymmetrische, und die Kurve für die Verteilung der mittleren kinetischen Energie zeigt ein (im Vergleich zu den experimentellen Werten) nur sehr schwach ausgebildetes Maximum.

Cameron<sup>4)</sup> modifizierte die Newtonsche Theorie dadurch, daß er die Annahme eines konstanten (d. h. vom speziellen Spaltungskanal unabhängigen)

<sup>3)</sup> T. D. Newton, Chalk River report CRP-642-A, 307.

<sup>4)</sup> A. G. W. Cameron, Rev. mod. Physics **30**, 553 (1958).



$R$  fallen ließ; er setzte  $R$  als Summe  $R_0 + R'$  an, wobei  $R_0$  als Funktion von  $m$  zu denken ist und  $R'$  die zusätzliche Radiusvergrößerung der Fragmente infolge innerer Anregung wiedergibt.  $R_0(m)$  wurde so bestimmt, daß die experimentelle Kurve der Massenverteilung (bei  $U^{235}$ ) reproduziert wird. Die  $R_0$ -Kurve zeigt ein Maximum für  $m \approx 1,57$  (Abb. 6). Berechnet man mit diesen  $R_0$ -Werten die mittlere kinetische Energie der Bruchstücke (als Funktion von  $m$ ), so zeigt sich wie bei Newton, daß der experimentell deutlich ausgeprägte Höcker im Kurvenverlauf nur angedeutet wird.

Zusammenfassend können wir sagen: Während die Überlegungen zur Kernspaltung im Rahmen des Tröpfchenmodells bis jetzt nur qualitativen Charakter tragen, liefert die Fong-Newtonsche Theorie zwar quantitative Ergebnisse, aber weder aus der Vorstellung, daß die Spaltungswahrscheinlichkeit allein durch den statistischen Faktor bestimmt ist, noch aus der zusätzlichen Berücksichtigung des Einflusses der Coulomb-Schwelle folgt (unter der Annahme, daß  $R$  und  $\gamma$  konstant sind) eine befriedigende Erklärung des Spaltungsvorganges. Die Annahme eines kanalabhängigen  $R$  dagegen (Camerons  $R_0$ ) stellt eine ad-hoc-Hypothese dar, die einer physikalischen Begründung bedarf. Wir werden im folgenden zeigen, daß die Cameronsche  $R_0$ -Variation in der Tat (auch quantitativ) verstanden werden kann, wenn man berücksichtigt, daß die Bruchstücke auch nach ihrer Trennung noch durch Kernkräfte aufeinander einwirken. Dadurch wird die Potentialschwelle der Newtonschen Theorie modifiziert: zu dem Coulomb-Anteil kommt ein Kernkraftanteil hinzu. Es ist klar, daß  $R_0$  nunmehr kanalabhängig ist:  $R_0$  ist ja als Stelle des Eindringens in die Potentialschwelle (klassischer Umkehrpunkt der Bewegung) zu definieren, hängt also von der Stärke und Reichweite der Kernkraftwechselwirkung und der Lage des Tunnels ab.

Unser Bemühen geht im folgenden dahin, die Größe der Kernkraftwechselwirkung semiempirisch so zu bestimmen, daß die experimentelle Kurve der Massenverteilung erhalten wird; mit anderen Worten, die Spaltungsasymmetrie durch eine Variation der Stärke der Kernkraftwechselwirkung mit dem Massenverhältnis  $m$  zu verstehen, wobei diese Variation selbst als ein durch die jeweilige Nukleonen-Konfiguration bedingter Effekt physikalisch verständlich gemacht werden soll.

### Das Modell

Wir gehen aus von folgendem Bild der Kernspaltung: Durch Einschnürung des Kerns, die im Rahmen des Tröpfchenmodells beschrieben werden kann, entstehen zwei hochangeregte Bruchstücke. Das Tröpfchenmodell führt zu einer Bevorzugung der symmetrischen Einschnürung. Da aber die hierfür verantwortliche Schwellenenergie nur sehr schwach von  $m$  abhängt (s. Frankel und Metropolis<sup>5)</sup>), ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Spaltstücke in einem bestimmten Massenverhältnis  $m$  gebildet werden, eine nur schwach mit  $m$  variierende Funktion, so daß diese Wahrscheinlichkeit in guter Näherung als  $m$ -unabhängig angesehen werden kann (s. Newton<sup>3)</sup>), was einem (bezüglich  $m$ ) konstanten  $\gamma$  in Gl. (1) und (2) entspricht. Diese Annahme erscheint um so mehr berechtigt, als die beiden Bruchstücke während ihrer Bildung, bedingt durch die zunehmende Herausbildung von Schaleneffekten, aus energetischen Gründen Nukleonen austauschen werden. Hieraus folgt

<sup>5)</sup> S. Frankel u. N. Metropolis, *Physics. Rev.* **72**, 914 (1947).

allerdings, daß mit einem von  $m$  unabhängigen  $\gamma$  in guter Näherung nur bis zu  $m \lesssim 1,7$  gerechnet werden darf. Da aber die Änderung von  $\gamma$  mit  $m$  für  $m \gtrsim 1,7$  sich nur unwesentlich auf unsere Ergebnisse auswirkt, werden wir im folgenden  $\gamma$  für den gesamten  $m$ -Bereich als konstant betrachten.

Um die Rechnungen einfach zu gestalten, machen wir die idealisierende Annahme, daß bei einer Spaltung im Massenverhältnis  $A_1:A_2$  nur das Wertepaar  $Z_1, Z_2$  in Erscheinung tritt, das der maximalen Energiefreisetzung entspricht. Unter Zugrundelegung der Bethe-Weizsäcker-Formel bedeutet dies, daß  $Z_i$  aus der Gleichung

$$Z_i = Z A_i \frac{132 + (A - A_i)^{1/2}}{132 A + A_1 A_2 (A_1^{-1/2} + A_2^{-1/2})} \quad (A = A_1 + A_2) \quad (3)$$

zu entnehmen ist. Die so gewonnene Aufspaltung von  $Z$  in  $Z_1 + Z_2$  entspricht nicht genau der „ungeänderten Verteilung“  $Z_1:Z_2 = A_1:A_2$ , sondern das Verhältnis  $Z_i:A_i$  ist für das leichte Bruchstück größer als für das schwere. Dieser Unterschied ist aber in dem uns interessierenden  $m$ -Bereich vernachlässigbar klein, so daß wir praktisch mit einer „ungeänderten Verteilung“ rechnen.

Die beiden Spaltstücke bilden ein Zweiteilchen-System, in dem einerseits anziehende Kernkräfte und andererseits abstoßende Coulombkräfte wirksam sind. Der Zerfall dieses Systems findet über ein virtuelles Niveau statt, dessen Berechnung im Prinzip folgendermaßen durchzuführen wäre:

Es interessieren die Lösungen der (zeitfreien) Schrödingergleichung des  $A$ -Teilchen-Problems, die sich in einem Teilbereich des Konfigurationsraumes in der Form

$$\psi = \chi_1 \chi_2 \varphi(\vec{s}) \quad (|\vec{s}| > R) \quad (4)$$

darstellen, d. h. die einem Zerfall in zwei Bruchstücke korrespondieren. Dabei beschreibt die Wellenfunktion  $\chi_i$  ( $i = 1, 2$ ) den inneren Anregungszustand des Bruchstückes  $i$ , der Vektor  $\vec{s}$  zeigt vom Schwerpunkt des einen Fragments auf den Schwerpunkt des anderen, und  $R$  ist der kleinste Wert von  $|\vec{s}| = s$ , für den die Bruchstücke noch als getrennte Teilchen anzusehen sind.  $\varphi$  ist eine Lösung der Schrödingergleichung, welche die Relativbewegung der beiden Fragmente beschreibt:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\nu} \Delta_{\vec{s}} + V(\vec{s}) - \varepsilon \right\} \varphi(\vec{s}) = 0. \quad (5)$$

Hier ist  $V(\vec{s})$  das Gesamtpotential, das sich aus einem Coulomb- und einem Kernkraftanteil zusammensetzt,  $\varepsilon$  die Energie des Zweiteilchen-Systems (die Anregungsenergien der Bruchstücke sind darin nicht enthalten) und  $\nu$  die reduzierte Masse.

Wenn wir uns auf einen festen Wert des Drehimpulses (Betrag und Komponente bezüglich einer definierten Achse) der Relativbewegung spezialisieren, stellt sich  $\varphi$  in bekannter Weise dar als

$$\varphi(\vec{s}) = \frac{1}{s} [a^{(+)} u_i^{(+)}(s) + a^{(-)} u_i^{(-)}(s)] Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (6)$$

wobei  $u_i^{(+)}$  eine auslaufende und  $u_i^{(-)}$  eine einlaufende Welle symbolisieren möge.

Das Verhältnis  $a^{(-)}:a^{(+)}$  ist bei festem  $m$  eine Funktion  $f$  von  $\varepsilon$  (und eventuell der Art der inneren Anregung der Bruchstücke), die sich im Prinzip aus der Lösung des  $A$ -Teilchen-Problems ergibt. Die Nullstellen von  $f$  definieren die virtuellen Niveaus, denn für  $f = 0$  stellt (6) eine reine auslaufende Welle dar.

Natürlich ist eine tatsächliche Berechnung von  $j$  praktisch kaum möglich; wir entnehmen daher die Höhe des virtuellen Niveaus, über welches das Zweiteilchen-System zerfällt, den experimentellen Daten der mittleren kinetischen Energie  $T$  der Bruchstücke, so daß sich damit das Spaltungsproblem auf die Berechnung des Tunneleffektes beim Auseinanderlaufen der Bruchstücke reduziert und als wesentliche Aufgabe die Bestimmung der Potentialschwelle (als Funktion der Konfiguration der Bruchstücke) verbleibt. Da der experimentelle  $T$ -Verlauf ein ausgeprägtes Maximum für  $m = 1,3$  besitzt und dieser  $m$ -Wert durch das Auftreten magischer Kerne als Bruchstücke (Neutronenzahl  $N = 82$  bzw. Protonenzahl  $Z = 50$ ) ausgezeichnet ist, tragen wir auf diese Weise von vornherein einem magischen Effekt Rechnung, auf dessen Bedeutung wir später noch hinweisen werden.

Im Rahmen des Newtonschen Formalismus gesehen machen wir so die Annahme, daß die reduzierte Kanalbreite  $\gamma$  (als Funktion der kinetischen Energie  $E_K$ , die den Bruchstücken für  $s = \infty$  zukommt und die mit  $\varepsilon$  übereinstimmt) einen deltafunktionsartigen Verlauf besitzt. Sie steht im Gegensatz zu der Newtonschen Vorstellung, daß  $\gamma$  bezüglich  $E_K$  als konstant anzusehen ist, und erscheint uns vernünftiger als diese Newtonsche „Hypothese völliger Unkenntnis“. — Die  $\delta$ -Funktion ist natürlich nur als Idealisierung eines komplizierten Kurvenverlaufs anzusehen, dessen Maximum eventuell durch eine Häufung virtueller Niveaus zustande kommt.

Die potentielle Energie  $V_K$  der beiden Bruchstücke, die von den Kernkräften herrührt, ist durch den Ausdruck

$$V_K = \sum_{i,j} \int \psi^* (\tau_1, \dots, \tau_A; \tau_1, \dots, \tau_A) v (\tau_i - \tau_j) \psi (\tau_1, \dots, \tau_A; \tau_1, \dots, \tau_A) d\Omega \quad (7)$$

gegeben. ( $\tau_k$  Ortskoordinate und  $\tau_k$  Spinkoordinate des Nukleons  $k$ ,  $v$  Zweinukleonenpotential, Integration über den gesamten Konfigurationsraum.) Hierbei soll der Summationsindex  $i$  nur über die Nukleonen des Bruchstückes 1, der Index  $j$  nur über die Nukleonen des Bruchstückes 2 laufen. Eine Berechnung des Ausdrucks (7) in Abhängigkeit vom Schwerpunktsabstand, dem Massenverhältnis und der inneren Anregung der beiden Bruchstücke wäre erforderlich, ist aber nur mit einem erheblichen mathematischen Aufwand möglich. Eine Abschätzung der Größenordnung von  $V_K$ , auf die wir uns hier beschränken wollen, ergibt (siehe Anhang), wenn wir für das Zweinukleonenpotential den Ausdruck

$$v (\tau_i - \tau_j) = -\frac{1}{2} (1 + PM) v_0 e^{-\mu |\tau_i - \tau_j|} \quad (8)$$

mit

$$\mu = \frac{Mc}{\hbar}, \quad v_0 \approx 30 \text{ MeV}$$

benutzen ( $M$  Masse des  $\pi$ -Mesons,  $PM$  Majorana-Austauschoperator), den Wert

$$V_K \approx -V_K^0 e^{-\mu x} \quad \text{mit} \quad V_K^0 \approx 135 \text{ MeV}, \quad (9)$$

wobei die Differenz  $s - R$  mit  $x$  bezeichnet wurde. Wir behalten im folgenden für  $V_K$  die Form (9) bei, sehen aber  $V_K^0$  (als Funktion von  $m$ ) als Parameter der Theorie an, über den wir später geeignet verfügen werden.  $R$  ist gegeben durch die Summe der Radien der beiden Bruchstücke; wegen  $A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \approx \text{const}$  ist  $R$  in guter Näherung  $m$ -unabhängig.

Die gesamte Potentialschwelle des Zweiteilchen-Systems der beiden Fragmente, die beim Auseinanderlaufen der Bruchstücke zu durchdringen ist, ergibt sich aus der Summe

$$V = V_K + V_C, \quad (10)$$

wobei die Coulomb-Energie  $V_C$  durch den bekannten Ausdruck

$$V_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R + x} \quad (11)$$

dargestellt wird. Die Verhältnisse sind in Abb. 3 verdeutlicht.

Die Stelle  $s_1$  des Eindringens in die Potentialschwelle, die mit dem Cameronschen  $R_0$  zu identifizieren ist, ist durch  $V$  und  $\varepsilon$  eindeutig bestimmt. Für  $\mu \rightarrow \infty$  (verschwindende Reichweite der Kernkraftwechselwirkung  $V_K$ ) gilt offenbar  $s_1 \rightarrow R$ , und die Potentialschwelle wird zu einer reinen Coulombschwelle. Der Grenzübergang  $\mu \rightarrow \infty$  führt also zur Newtonschen Theorie, wenn man von Newtons spezieller  $\gamma$ -Wahl und der Problematik des statistischen Faktors absieht, und wir erkennen auch, daß die von Cameron ad hoc eingeführte  $m$ -Abhängigkeit von  $R_0$  als ein Effekt der endlichen Reichweite der Kernkräfte zu verstehen ist.

Wir setzen die Durchdringungswahrscheinlichkeit der Potentialschwelle (10) gleich der relativen Spaltungswahrscheinlichkeit; der statistische Faktor wird somit als Konstante betrachtet. Dieses Vorgehen ist im Einklang mit der Vorstellung, daß beim Spaltungsprozeß nur sehr wenige Ausgangskanäle vorhanden sind, wie sie durch die experimentelle Untersuchung der Spaltung durch thermische Neutronen (s. Bigham<sup>6</sup>) und durch Spaltungsexperimente mit schnellen Neutronen (s. Almqvist<sup>7</sup>) nahegelegt wird. Abgesehen davon erschien es uns reizvoll, zeigen zu können, daß man den statistischen Faktor in der Tat gar nicht braucht, wenn man die obige Vorstellung der Wechselwirkung durch Kernkräfte und des Zerfalls über ein virtuelles Niveau des Zweiteilchen-Systems der Bruchstücke akzeptiert.

Kurz gesagt, unsere Theorie unterscheidet sich von der Newtonschen<sup>3</sup>) dadurch, daß die Wahrscheinlichkeit für die Durchdringung der durch die Kernkrafteinflüsse modifizierten Potentialschwelle an die Stelle der Durchdringungswahrscheinlichkeit der Coulombschwelle tritt, und daß die  $E_K$ -Abhängigkeit von  $\gamma$  empirisch bestimmt wird. Mit Newton halten wir an der Vorstellung eines  $m$ -unabhängigen Wertes von  $\gamma$  fest. Der statistische Faktor wird als Konstante betrachtet.

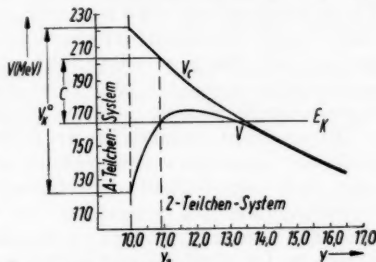


Abb. 3. Potentielle Energie  $V$  des Zweiteilchen-Systems und Coulombenergie  $V_C$  in Abhängigkeit von  $y = \mu s$

<sup>6</sup>) C. B. Bigham, Chalk River report CRP-642-A, 111.

<sup>7</sup>) E. Almqvist, Chalk River report CRP-642-A, 142.

## Die Ergebnisse

In der *WBK*-Näherung ergibt sich für die Durchdringungswahrscheinlichkeit der Potentialschwelle (10)

$$D = \text{const} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \frac{\sqrt{2\nu}}{\mu} \int_{y_1}^{y_2} \left( -K e^{-y} + \frac{L}{y} - \varepsilon \right)^{1/2} dy \right\} \quad (y = \mu s). \quad (12)$$

Hier ist  $K = V_K^0 e^{\mu R}$ ,  $L = Z_1 Z_2 e^2 \mu$ ,  $\nu$  wie oben die reduzierte Masse, und die Integrationsgrenzen sind als Nullstellen des Integranden definiert.  $\mu R$  hat in unserer Rechnung den Wert 10. Die Energie  $\varepsilon$  des Zweiteilchen-Systems ist offenbar gleich der kinetischen Energie  $E_K$  der Bruchstücke für  $s = \infty$ . Wir legen daher  $\varepsilon$  durch die experimentellen Daten der mittleren kinetischen Energie  $T$  fest:

$$\varepsilon = T. \quad (13)$$

Die  $m$ -Abhängigkeit von  $\varepsilon$  ist damit aus der Abb. 2 zu ersehen. (Da die experimentellen  $T$ -Werte sehr streuen, nahmen wir den gezeichneten  $T$ -Verlauf an, der mit den Daten von Brunton und Hanna<sup>8)</sup> einerseits und von Stein<sup>9)</sup> andererseits verträglich ist.)  $K$  wurde nun so bestimmt, daß die Theorie die experimentelle Massenverteilung genau wiedergibt.

Es erscheint angebracht, an dieser Stelle ein Wort über die prinzipielle Rolle der Kernkraftwechselwirkung zu sagen. Sie wird völlig deutlich, wenn man sich den Verlauf der Massenverteilung klar macht, der bei einer Durchdringung der unmodifizierten Coulomb-Schwelle (über die richtigen virtuellen Niveaus) auftritt: Offenbar führt der oben erwähnte magische Effekt in der  $T$ -Verteilung (Maximum bei  $m = 1,3$ ) zu einer starken Vergrößerung der Durchdringungswahrscheinlichkeit des Tunnels für  $m = 1,3$  und bedingt so bereits eine Spaltungssasymmetrie. Das Maximum der Spaltungswahrscheinlichkeit liegt jedoch bei dem durch das Maximum von  $T$  festgelegten zu kleinen  $m$ -Wert ( $m = 1,3$  statt 1,45), und die hauptsächliche Rolle der Kernkraftwechselwirkung besteht gerade darin, die notwendige Verschiebung des Maximums zu größeren  $m$ -Werten zu bewirken. (Dieser Sachverhalt gilt übrigens auch für alle anderen asymmetrisch spaltenden Targetkerne.)

Zur Bestimmung von  $K$  wurde zunächst der Maximalwert  $K_0$  von  $K$  durch die Forderung ermittelt, daß die beiden Nullstellen  $y_1$  und  $y_2$  zusammenfallen. Damit überhaupt eine Schwelle zu durchdringen ist, muß  $K < K_0$  sein. Die Lage  $y_0$  der doppelten Nullstelle des Integranden ist gegeben durch

$$\frac{1}{y_0} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{L}}, \quad (14)$$

und es ist

$$K_0 = \frac{L}{y_0^2} e^{y_0}. \quad (15)$$

Es wurde angenommen, daß für  $m = 1,4$   $K$  mit  $K_0$  zusammenfällt<sup>10)</sup>; für die anderen  $m$ -Werte muß  $K(m) < K_0(m)$  sein, damit das Integral in (12) größer

<sup>8)</sup> D. C. Brunton and G. C. Hanna, Can. J. Research A 28, 190 (1950).

<sup>9)</sup> W. E. Stein, Physics. Rev. 108, 94 (1957).

<sup>10)</sup> Diese Annahme ist natürlich willkürlich, aber nicht von grundsätzlicher Bedeutung für die weiteren Folgerungen. Würde man für  $K(m = 1,4)$  einen kleineren Wert als  $K_0(m = 1,4)$  wählen, dann würden sämtliche  $K$ -Werte unter den von uns berechneten liegen, aber die typische Form der Kernkraftwechselwirkung, auf die es uns hauptsächlich ankommt, bliebe erhalten.

als Null wird und ein Abklingen der Spaltungswahrscheinlichkeit vom Maximalwert (bei  $m = 1,4$ ) eintritt.

Macht man den Ansatz  $K = K_0 - k$ , so ergibt sich genähert, wenn man das Integral in (12) durch

$$I = \frac{2}{3} (y_2 - y_1) \left( -K e^{-\frac{y_1 + y_2}{2}} + \frac{2L}{y_1 + y_2} - \varepsilon \right)^{1/2} \quad (16)$$

ersetzt (Keplersche Faßregel),

$$I = \frac{4}{3} \frac{e^{-\frac{y_0}{2}}}{\sqrt{K_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{y_0} \right)}} k. \quad (17)$$

Da  $I$  durch die experimentelle Massenverteilung festgelegt ist, wenn man  $D$  als (relative) Spaltungswahrscheinlichkeit interpretiert, erlaubt (17) eine einfache Bestimmung von  $k$  und damit auch von  $V_K$ . Abb. 4 zeigt die so gewonnenen Werte.

Für den Einfluß der Kernkraftwechselwirkung auf den Tunneleffekt ist der Betrag von  $V_K$  an der Stelle  $y_1$  des Eindringens in den Tunnel maßgebend; dieses „effektive Kernkraftpotential“  $C$  ist in Abb. 5 aufgetragen.

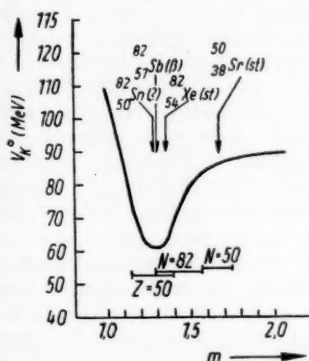


Abb. 4. Stärke der Kernkraftwechselwirkung als Funktion von  $m$ . Es sind die Bereiche eingezeichnet, in denen magische Kerne auftreten können, sowie einige spezielle magische Kerne

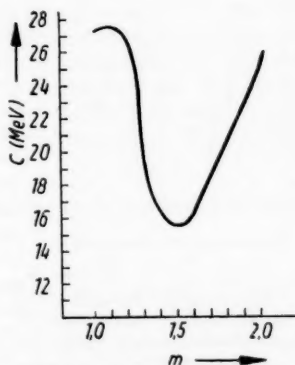


Abb. 5. „Effektives Kernkraftpotential“  $C$  in Abhängigkeit von  $m$

$y_1$  selbst folgt in der obigen Näherung aus der Gleichung

$$y_1 = y_0 - \left( \frac{p}{2} + \sqrt{p} \right), \quad p = \frac{2k}{K_0}. \quad (18)$$

Die hieraus resultierenden Werte  $s_1 = \frac{y_1}{\mu}$  findet man in Abb. 6; sie stimmen recht gut mit den in der Abbildung ebenfalls gezeichneten Cameronschen Werten  $R_0$  überein.



Wie aus den Abb. 4 und 5 hervorgeht, lassen sich unsere Ergebnisse folgendermaßen formulieren:

1. Die statische Kernkraftwechselwirkung  $V_K^0$  ist minimal — um etwa 40 % kleiner als bei symmetrischer Spaltung — für  $m = 1,3$ . Dieses Massenverhältnis ist dadurch ausgezeichnet, daß sich dort die magischen Bereiche  $Z = 50$  und  $N = 82$  überdecken, (s. Abb. 4, wo die Bereiche, in denen magische Kerne auftreten, sowie einige spezielle magische Kerne<sup>11)</sup> eingezeichnet sind) und ein doppelt-magischer Kern — der einzige, der bei der Spaltung von  $U^{235}$  überhaupt möglich ist — in Erscheinung treten kann.  $V_K^0$  wächst von dem genannten Minimum aus für größere  $m$  schwächer an ( $V_K^0$  bleibt um etwa 20% unter dem Wert für  $m = 1$ ) als für kleinere  $m$ , was mit dem Auftreten der magischen Neutronenzahl 50 in Zusammenhang zu stehen scheint<sup>12)</sup>. Das stark ausgeprägte Minimum von  $V_K^0$  findet sein Gegenstück in einem Maximum der kinetischen Energie  $T$  bei demselben Massenverhältnis  $m = 1,3$ .

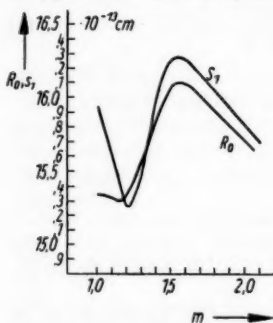


Abb. 6. Die Stelle  $s_1$  des Eindringens in die Potentialschwelle ( $R_0$  bezeichnet den Cameron-schen Wert)

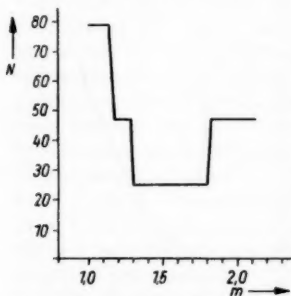


Abb. 7. Gesamtzahl  $N$  der außerhalb abgeschlossener Schalen befindlichen Nukleonen als Funktion von  $m$

2. Das effektive Kernkraftpotential  $C$ , das die Tunnelhöhe und dadurch die Massenverteilung festlegt, zeigt denselben Verlauf wie die Gesamtzahl der außerhalb abgeschlossener Schalen befindlichen Nukleonen, wie man durch Vergleich mit der Abb. 7, in der diese Zahl aufgetragen ist, erkennt. Während durch das Minimum von  $V_K^0$  die magische Neutronenzahl  $N = 82$  vor  $N = 50$  ausgezeichnet ist, scheinen nunmehr die beiden Zahlen gleichberechtigt zu sein, was zu einer Verschiebung des Maximums der Massenverteilungskurve (bei  $m = 1,45$ ) gegenüber dem Minimum der  $V_K^0$ -Kurve (bei  $m = 1,3$ ) führt.

Die Frage, wie der genannte Zusammenhang von  $C$  mit der Schalenstruktur quantitativ ver-

standen werden kann, ist sehr schwierig, denn  $C$  ist eine abgeleitete Größe, deren Wert erst durch das Zusammenspiel von Tiefe und außerdem Reichweite des Kernkraftpotentials  $V_K$ , Coulomb-Potential  $V_C$  und kinetischer Energie  $T$  entsteht. Ihre Beantwortung ist erst dann möglich, wenn eine Erklärung für den Verlauf von  $V_K^0$  und  $T$  in Abhängigkeit von der Nukle-

<sup>11)</sup> Dabei wurde — wie durchweg in dieser Arbeit — angenommen, daß die Neutronenverderpfung erst nach der Trennung der Bruchstücke eintritt.

<sup>12)</sup> Berücksichtigt man nur die Werte der kinetischen Energie nach Stein, welche ein relatives Maximum bei  $m = 1,9$  zeigen, dann ergibt sich auch ein ausgeprägtes, wenn auch schwächeres Minimum von  $V_K^0$  bei dem Massenverhältnis  $m = 1,9$ , was einer Neutronenzahl für das leichtere Bruchstück von  $N = 50$  entspricht.



onenkonfiguration gegeben werden kann. Eine theoretische Bestimmung von  $T$  ist aber kaum durchführbar, sie würde die Lösung des  $A$ -Teilchen-Problems (s. o.) voraussetzen, und zwar mit einem solchen Genauigkeitsgrad, daß auch die Schalenstruktur der Kerne miteinfaßt würde!

Im Gegensatz dazu erscheint uns das Problem der Erklärung der Abhängigkeit der Größe  $V_K^0$ , die neben  $T$  den fundamentalen Parameter unserer Theorie darstellt, von der Nukleonenkonfiguration eher lösbar zu sein.

Wir sehen den einfachsten Mechanismus, der zu einer solchen Abhängigkeit führt, in einer von Fall zu Fall verschiedenen Deformation der Bruchstücke (wir haben bisher mit Kugeln gerechnet) „im Augenblick“ ihrer Entstehung: Wenn nämlich diese Deformation bei  $m = 1,3$  (magische Kerne) minimal ist<sup>13</sup>), dann hat — vorausgesetzt, daß die Bruchstücke stets in Richtung der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte gedehnt werden — auch  $V_K$  (bei festem Wert des Schwerpunktsabstandes) ein Minimum für dieses Massenverhältnis, und infolge der geringen Reichweite der Kernkräfte können bereits kleine Unterschiede in der Deformation zu beträchtlichen Änderungen des Kernkraftpotentials Anlaß geben. Diesem Gedanken soll in einer folgenden Arbeit weiter nachgegangen werden, in der auch der Versuch unternommen werden soll, zu einem zumindest qualitativen Verständnis des magischen Effektes im  $T$ -Verlauf zu gelangen.

Unser bisheriges Ergebnis noch einmal zusammenfassend können wir sagen: Es scheint so zu sein, als ob Schaleneffekte eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Spaltungsasymmetrie spielen, allerdings nicht in der von Fong vorgeschlagenen Weise über die vergrößerte Anregungsenergie bzw., wie schon früher diskutiert, über die relativ große Bindungsenergie der Bruchstücke in der Nachbarschaft magischer Kerne, sondern einerseits über eine Vergrößerung der kinetischen Energie der Bruchstücke und andererseits über eine Verminderung der Stärke der Kernkraftwechselwirkung durch Herausbildung abgeschlossener Schalen.

Herrn Prof. Dr. G. Richter möchten wir für wertvolle kritische Diskussionen herzlich danken.

### Anhang

Die potentielle Energie  $V_K$  der Bruchstücke, die von den Kernkräften herrührt, ist allgemein durch Gl. (7) gegeben. Wenn wir uns auf reine Wignerkräfte spezialisieren ( $v(r) = -v_0 e^{-\mu r}$ ) und annehmen, daß die Nukleondichte  $\varrho_i$  ( $i = 1, 2$ ) innerhalb jedes Bruchstückes räumlich konstant ist und an der Oberfläche scharf auf den Wert Null abfällt, reduziert sich (7) auf das Integral

$$V_K^{(W)} = -v_0 \varrho_1 \varrho_2 \int e^{-\mu|\mathfrak{s} + \mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{A } 1)$$

Hier bezeichnet  $\mathfrak{s}$  wie früher den vektoriellen Schwerpunktsabstand der Bruchstücke. Die  $\mathbf{r}$ -Integration ist über das Volumen des Bruchstückes 1 (Kugel vom Radius  $R_1$ ) zu erstrecken, die  $\mathbf{r}'$ -Integration entsprechend über das Volumen des Bruchstückes 2 (Kugel vom Radius  $R_2$ ).  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  denke man sich jeweils vom Schwerpunkt des betreffenden Kerns aus gezählt.

<sup>13)</sup> Diese Vorstellung findet eine gewisse Stütze in den experimentellen Werten für das elektrische Quadrupolmoment des Grundzustandes der Kerne, die ebenfalls für magische Kerne ein Minimum zeigen.

Statt (A 1) kann man offenbar schreiben

$$V_K^{(W)} = v_0 \varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial}{\partial \mu} \int \frac{e^{-\mu |\vec{s} + \vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{s} + \vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r'; \quad (\text{A } 2)$$

hieraus erhält man leicht

$$V_K^{(W)} = v_0 \varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ C_1 C_2 \frac{e^{-\mu s}}{s} \right] \quad (\text{A } 3)$$

mit

$$C_i = \frac{4\pi (\mu R_i)}{\mu} \frac{\mathfrak{C}0[\mu R_i] - \mathfrak{S}in(\mu R_i)}{\mu^2} \quad (i = 1, 2).$$

Wenn wir  $s = R + x$  ( $R = R_1 + R_2$ ) setzen und  $e^{-\mu R}$  gegen  $e^{\mu R}$  vernachlässigen, folgt aus (A 3) die Gleichung

$$V_K^{(W)} = -\frac{9}{4} v_0 \frac{A_1 A_2 e^{-\mu x}}{\mu (R+x)} \frac{\mu^2 R_1 R_2 (4 + \mu x) - \mu R (5 + \mu x) + (6 + \mu x)}{(\mu R_1)^3 (\mu R_2)^3}, \quad (\text{A } 4)$$

oder genähert (unter Beachtung von  $(\mu R_i)^3 = A_i$ )

$$V_K^{(W)} = -\hat{V}_K^{(W)} e^{-\mu x} \quad (\text{A } 5)$$

mit

$$\hat{V}_K^{(W)} = \frac{9}{4} \frac{v_0}{\mu R} (4 \mu^2 R_1 R_2 - 5 \mu R + 6).$$

Um den Einfluß von Austauschkräften zu berücksichtigen, setzen wir  $v = -\frac{1}{2} (1 + PM) v_0 e^{-\mu r}$  ( $PM$  Majorana-Austauschoperator) und argumentieren in der üblichen einfachen Weise (s. z. B. Blatt und Weisskopf<sup>14)</sup>): Ein Paar von Nukleonen liefert keinen Beitrag zum Majorana-Anteil der potentiellen Energie, wenn es sich um verschiedene Teilchen (bezüglich Isospin- und Spinvariabler) in verschiedenen räumlichen Zuständen handelt, dagegen das Negative des Wigneranteils, wenn es sich um gleiche Teilchen (gleiche Art und gleicher Spin) handelt. Nun gibt es offenbar  $2 \left( \frac{N_1 N_2}{2} + \frac{Z_1 Z_2}{2} \right)$  gleiche Paare und  $A_1 A_2$  Paare insgesamt. ( $N_i$  Zahl der Neutronen im Fragment i.) Daher ist

$$V_K^0 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{N_1 N_2 + Z_1 Z_2}{A_1 A_2} \right] \hat{V}_K^{(W)} \approx \frac{3}{8} \hat{V}_K^{(W)}. \quad (\text{A } 6)$$

$V_K^0$  nimmt nur schwach ab, wenn  $m$  von 1 an wächst. Wir setzen  $m = 1$ ,  $\mu = \frac{Mc}{\hbar}$ , ( $M$  Masse des  $\pi$ -Mesons) und  $v_0 \approx 30$  MeV, dann folgt aus (A 6)

$$V_K^0 \approx 135 \text{ MeV}. \quad (\text{A } 7)$$

<sup>14)</sup> J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley & Sons 1956, p. 146.

Zeuthen bei Berlin, Kernphysikalisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 22. Dezember 1959.

(A 2)

(A 3)

**Über die Felddesorption von  
Magnesium, Rubidium und Silber<sup>1)</sup>**

R ver.

Von Herbert Kirchner

Mit 6 Abbildungen

(A 4)

**Inhaltsübersicht**

(A 5)

Im Höchstvakuum werden die elektrischen Feldstärken gemessen, die zum Abreißen verschiedener Ionen (Rb, Mg, Ag) von der glatten Oberfläche einer Wolframeinkristallspitze erforderlich sind. Die gemessenen Abreißfeldstärken sind von der gleichen Größenordnung und nehmen in der gleichen Reihenfolge zu (Rb—Mg—Ag), wie die Bildkraft des betreffenden Ions vor der Metalloberfläche; sie sind im Bereich von  $-193$  bis  $25^{\circ}\text{C}$  nur wenig temperaturabhängig. Rechnet man entsprechend der Bildkraft mit einem quadratischen Kraftgesetz, so kommt die aus den Abreißfeldstärken berechnete Bindungsenergie der Ionen erheblich kleiner heraus, als ihre „Verdampfungswärme“, die sich mit Hilfe eines von Langmuir und Kingdon angegebenen Kreisprozesses aus anderen Daten berechnen läßt; dies deutet darauf hin, daß außer der Bildkraft noch eine vor der Metalloberfläche befindliche negative Raumladung zur Bindung des Ions wesentlich beiträgt.

Die an dünnen Wolframoxyd- und -carbidschichten beobachteten niedrigen Werte der Abreißfeldstärke werden auf die Struktur und geringe Leitfähigkeit dieser Schichten zurückgeführt.

(A 6)

**I. Einleitung**

$= 1,$

(A 7)

Von der lichtelektrischen und thermischen Elektronenemission der Metalle ist schon lange bekannt, daß sie in starkem Maße vom Zustand der Oberfläche des Metalls abhängen. An wirklich reinen Metalloberflächen liegen bisher nur wenige Untersuchungen vor, und die Verhältnisse an der Metalloberfläche sind auch theoretisch noch nicht so weit geklärt wie diejenigen im Innern des Metalls. Der Zweck der vorstehenden Arbeit soll es sein, durch die experimentelle Untersuchung der Wirkung von starken elektrischen Feldern einen Beitrag zur Klärung der Energieverhältnisse an der Metalloberfläche zu liefern. Als geeignete Untersuchungsmethode wurde die Messung derjenigen elektrischen Feldstärke gewählt, mit der ein geladenes Atom von der Metalloberfläche gerade abgerissen werden kann: als Hilfsmittel für die Kontrolle dieses Abreißvorgangs wurde die von E. W. Müller entwickelte Beobachtungsmethode der Feldelektronenemission aus feinen Kristallspitzen verwendet.

demie

E. W. Müller hat im Jahre 1941 beobachtet, daß eine auf die Wolframspitze seines „Feldelektronenmikroskops“ aufgedampfte dünne Barium-

<sup>1)</sup> D 38; gekürzt.

schicht in mehr oder weniger großen Gebieten plötzlich abgerissen wurde, wenn er an die Spitze eine genügend hohe positive Spannung anlegte<sup>2)</sup>. In einer späteren Arbeit untersuchte er, wie die zum Abreißen der Bariumschichten erforderliche Mindestfeldstärke mit der Schichtdicke zu- und mit der Temperatur abnimmt<sup>3)</sup>. Im hiesigen Institut wurden ähnliche Abreißversuche an Wolframspitzen durchgeführt, die mit dünnen Schichten von Wolframoxyd bzw. Wolframcarbid bedeckt waren<sup>4)</sup>. Zur experimentellen Klärung der Frage, inwieweit bei den beobachteten Abreißerscheinungen die ionisierende Wirkung des elektrischen Feldes<sup>5)</sup> und die Bildkraft des adsorbierten Ions vor der Metalloberfläche<sup>6)</sup> eine Rolle spielen, wurde im Jahre 1955 eine eingehende Untersuchung über die Abreißfeldstärke von Magnesium, Rubidium und Silber in Angriff genommen. Bei den Vorversuchen ergab sich, daß die Bildkraft offenbar von entscheidendem Einfluß auf die Größe der Abreißfeldstärke ist<sup>6)</sup>; gleichzeitig stellte sich aber heraus, daß auch schon sehr geringe Gasreste noch einen merklichen Einfluß auf die gemessenen Abreißfeldstärken ausüben können. Bei einem Gasdruck von  $10^{-7}$  Torr, entsprechend einer gaskinetischen Stoßzahl von  $4 \cdot 10^{14}/\text{cm}^2 \text{ sec}$ , kann der Aufbau einer monoatomaren Adsorptionsschicht — bei dichtester Kugelpackung etwa  $10^{15}$  Moleküle/ $\text{cm}^2$  — schon in zwei bis drei Sekunden erfolgen, falls jedes auftreffende Molekül haftet. Um genügend Zeit zum Aufbringen der Schicht auf die gereinigte Oberfläche und zur Durchführung des Abreißversuchs zu haben, muß deshalb ein mindestens hundertmal kleinerer Gasdruck, also ein Druck von höchstens  $10^{-8}$  Torr gefordert werden. Die Herstellung, Aufrechterhaltung und Messung von so niedrigen Gasdrücken machten besondere Maßnahmen erforderlich.

## II. Versuchsanordnung

Die Glasapparatur war bei den Vorversuchen aus gewöhnlichem Glas, bei den späteren Versuchen aus Jenaer Glas hergestellt.

Als Versuchsröhren wurden Kugelkolben verwendet. Auf der Innenseite der Kolben wurde nach einem von R. Gomer<sup>7)</sup> angegebenen Verfahren eine leitfähige, aber durchsichtige Schicht hergestellt. Auf diese leitfähige Schicht wurde dann ein Leuchtschirm aus Willemit aufgestaubt. An seitliche Ansatzrohre des Kolbens waren zwei Quetschfüße mit jeweils drei Molybdändraht-Durchführungen angeschmolzen, die als Halterung für die Wolframspitze, eine Wolframwendel mit dem zu verdampfenden Metall und weitere Wolfram- oder Molybdändrähte für Getterzwecke dienten.

Zur Evakuierung der Versuchsröhre wurde eine dreistufige Quecksilberdiffusionspumpe aus Metall verwendet. Zur Fernhaltung des Quecksilberdampfes dienten zwei hintereinander geschaltete Kühlfallen. Zwischen Kühlfallen und Versuchsröhre war ein ausheizbares Hochvakuumventil nach R. Decker<sup>8)</sup> angebracht. Die von ihm angegebene Konstruktion wurde insofern geändert, als der Sperriegel auf die mit den Kühlfallen verbundene Seite

<sup>2)</sup> E. W. Müller, Naturwiss. **29**, 533 (1941).

<sup>3)</sup> E. W. Müller, Ergebn. exakt. Naturwiss. **27**, 29 (1953).

<sup>4)</sup> F. Kirchner u. H. Kirchner, Z. Naturforsch. **10a**, 394 (1955).

<sup>5)</sup> F. Kirchner, Naturwiss. **41**, 136 (1954).

<sup>6)</sup> F. Kirchner u. H. Kirchner, Z. Naturforsch. **11a**, 718 (1956).

<sup>7)</sup> R. Gomer, Rev. sci. Instrum. **24**, 999 (1953).

<sup>8)</sup> R. Decker, J. Appl. Phys. **25**, 1441 (1954).

des Schliffs verlegt wurde. Das Ventil beruht darauf, daß ein ungefetteter und ausgeheizter Glasschliff im Hochvakuum praktisch undurchlässig ist.

Durch ein Ansatzrohr unmittelbar mit der Versuchsröhre verbunden war ein vereinfachtes Ionisationsmanometer nach R. T. Bayard und D. Alpert<sup>9)</sup>.

Da beim Verdampfen von Silber besonders große Mengen von Sauerstoff frei werden — auch wenn es sich um „vakuumgeschmolzenes“ Silber handelt — mußte, um Verunreinigungen der Wolframoberfläche zu verhindern, das Silber vorher mehrere Male im Höchstvakuum geschmolzen werden. Zwischen den einzelnen Schmelzprozessen mußte der Kolben wieder ausgeheizt werden; dabei wanderte das verdampfte Silber über den Kolben und führte beim Anlegen der hohen Abreißspannung zu Überschlügen im Innern der Versuchsröhre. Um diese Störungen zu vermeiden, wurde die Schmelz- und Verdampfungseinrichtung aus dem Kolben heraus in ein seitliches Ansatzrohr verlegt und durch eine magnetisch verschiebbare Blende vom Versuchskolben abgetrennt.

Für die Abreißversuche mit Rubidium bei der Temperatur der flüssigen Luft wurde eine Versuchsröhre konstruiert, die sich vollständig in flüssige Luft eintauchen ließ. Die Versuchsröhre bestand aus gewöhnlichem Glas; für die Einschmelzung des Quetschfußes und der Zuleitungen für die Verdampfung des Rubidiums wurde Bleiglas verwendet. Dieses hat gegenüber Jenaer Glas und Pyrexglas eine besonders niedrige Leitfähigkeit und eignet sich daher gut zu Versuchen, bei denen schwache Ströme bei höheren Temperaturen zu messen sind.

### III. Maßnahmen zur Herstellung des erforderlichen Höchstvakuums

Nach der Inbetriebnahme der Apparatur wurden zunächst größere Undichtigkeiten mit den üblichen Methoden aufgesucht und beseitigt. Zum Aufsuchen von kleineren Undichtigkeiten hat sich bei unseren Versuchen das Aufsprühen von Sauerstoff bei laufendem Ionisationsmanometer am besten bewährt. Wird nämlich eine Undichtigkeit vom Sauerstoffstrom getroffen, so sinkt der Elektronenstrom des Ionisationsmanometers momentan um etwa 5–30%. Dieses Absinken ist auf die größere Elektronenaustrittsarbeit einer mit Sauerstoff bedeckten Wolframoberfläche zurückzuführen.

Wurde ein Enddruck von mindestens  $10^{-5}$  Torr erreicht, so wurde die Apparatur mehrere Male für die Dauer von 6–8 Stunden bei etwa 400 °C ausgeheizt. Dazwischen wurden alle Metallteile auf eine höhere Temperatur gebracht, als sie später beim Betrieb haben sollten. Insbesondere wurden das Gitter und die Anode des Ionisationsmanometers durch Elektronenbombardement so hoch erhitzt, daß gerade noch keine merkbare Verdampfung eintrat. Die Temperatur der Glühfäden wurde soweit gesteigert, bis der mit dem Ionisationsmanometer gemessene Druck beim Einschalten der Glühfäden nicht mehr anstieg, sondern durch Getterwirkung des von den Glühfäden verdampfenden Wolframs abnahm. Um einen nachträglichen Wiederanstieg des Drucks durch Freiwerden von Dampf- und Gasresten aus den nichtausgeheizten Teilen der Apparatur zu verhindern, wurde nach nochmaligem Ausglühen der Elektroden das Glasventil geschlossen. Zur weiteren Erniedrigung des Druckes wurde dann das Ionisationsmanometer als „Ionenpumpe“ in

<sup>9)</sup> R. T. Bayard u. D. Alpert, Rev. sci. Instrum. **21**, 571 (1950).

Betrieb genommen. Nach einer Betriebsdauer von einer Stunde wurde damit gewöhnlich ein Druck von  $1 \cdot 10^{-8}$  Torr erreicht. Eine schnellere Druckverminderung konnte durch Gettern mit den Hilfspglühfäden erzielt werden.

Zur Druckkontrolle diente einerseits das Ionisationsmanometer nach Bayard und Alpert, andererseits die Änderung der Feldelektronenemission als Folge der Bedeckung der Spitzenoberfläche mit adsorbierten Gasmolekülen. Das Ionisationsmanometer wurde mit Hilfe eines Kompressionsmanometers nach McLeod geeicht. Als Folge der Bedeckung der Spitzenoberfläche mit Gasmolekülen ändert sich das Feldelektronenbild in charakteristischer Weise, die unter normalen Versuchsbedingungen einigermaßen reproduzierbar ist. Da bei sehr niedrigen Drucken die Bedeckungszeit umgekehrt proportional zum Druck ist, läßt sich nach M. Drechsler und E. Heß<sup>10)</sup> der herrschende Gasdruck aus der gemessenen Zeit bis zum Erreichen einer bestimmten Veränderung des Feldelektronenbildes ermitteln. Bei unseren Versuchen ergab sich, daß zwar der aus der Bedeckungszeit ermittelte Druck mit der Druckanzeige des Ionisationsmanometers bei geschlossenem Glasventil übereinstimmte, wenn die beiden Druckbestimmungen nacheinander erfolgten, daß aber die Bedeckungszeit mehr oder weniger stark davon abhing, ob während der Beobachtung das Ionisationsmanometer eingeschaltet war oder nicht (vgl. <sup>11)</sup>). Aus Beobachtungen über die Temperaturen, die für die Desorption des Gases von der „verunreinigten“ Spitze erforderlich waren, und aus gewissen Unterschieden des Emissionsbildes im späteren Verlauf der Bedeckung ergab sich, daß wahrscheinlich das mehr oder weniger starke Auftreten von Kohlenstoffverbindungen im Restgas die erwähnten Unterschiede verursacht. Eine eindeutige Beziehung zwischen Bedeckungszeit und Druckanzeige des Ionisationsmanometers wäre also nur dann zu erwarten, wenn die Zusammensetzung des Gases stets dieselbe bliebe. Da aber zweifellos der Anteil von Kohlenoxyd und Kohlenwasserstoffen gerade durch die Inbetriebnahme des Ionisationsmanometers erheblich geändert wird, kann man weder aus der gemessenen Bedeckungszeit in eindeutiger Weise auf den Gasdruck, noch aus dem mit dem Manometer gemessenen Druck auf die zu erwartende Bedeckungszeit der Spitze schließen. Für die vorliegenden Versuche kam es aber nicht so sehr auf die genaue Kenntnis des Gasdrucks und der Bedeckungszeit an, sondern vielmehr darauf, daß der Gasdruck so niedrig und die Bedeckungszeit so groß waren, daß auf den zu untersuchenden Oberflächen keine störenden Verunreinigungen mehr auftraten; dies konnte dadurch sichergestellt werden, daß zur Druckkontrolle beide Methoden herangezogen wurden.

#### IV. Versuchsergebnisse

Die Abreißversuche wurden in der Weise durchgeführt, daß jeweils während einer bestimmten Zeit — bei den meisten Versuchen eine Minute — eine positive Spannung von bestimmter Höhe an die Spitze gelegt und danach mit negativer Spannung kontrolliert wurde, ob eine Änderung der Feldelektronenemission eingetreten war. Aus der niedrigsten positiven Spannung, mit der ein bestimmter Abreißeffekt gerade erzielt werden konnte, wurde dann im Anschluß

<sup>10)</sup> M. Drechsler u. E. Heß, ref. v. H. König, Vac. **3**, 3 (1953).

<sup>11)</sup> F. Kirchner u. H. Kirchner, Z. Angew. Phys. **8**, 478 (1956).



an Überlegungen von H. A. Ritter<sup>12)</sup>, E. W. Müller<sup>13)</sup> und M. Drechsler und E. Henkel<sup>14)</sup> auf Grund der wellenmechanischen Intensitätsformel für die Feldelektronenemission (vgl. A. Sommerfeld und H. Bethe<sup>15)</sup>) die zugehörige Abreißfeldstärke berechnet. Nach M. Drechsler und E. Henkel<sup>14)</sup> nimmt eine Wolframspitze infolge des zu ihrer Säuberung erforderlichen starken Ausglühens eine solche Form an, daß sich ihr elektrisches Feld als Überlagerung desjenigen eines Hyperboloids mit einem zwischen Null und 0,25 liegenden Anteil des Feldes einer Kugel darstellen läßt. Für die vorliegenden Versuche kommt für den Formfaktor praktisch nur der Bereich von Null bis 0,2 in Frage; da in diesem Bereich die wirksame Feldstärke höchstens um 5–7% von der mit dem Formfaktor 0,1 berechneten Feldstärke abweicht, wurde der Auswertung der Versuche durchwegs der Formfaktor 0,1 zugrunde gelegt.

### 1. Magnesium auf oxydiertem Wolfram

Bei den Vorversuchen mit Magnesium zeigte sich, daß die Abreißfeldstärke stark von der Reinheit der Spitzenoberfläche bzw. von der Güte des Vakuums während und nach dem Aufdampfen des Metalls abhängig ist. Läßt man auf eine Wolframspitze Sauerstoff einwirken und glüht sie dann bei einer Temperatur von etwa 1400 °C, so erhält man ein Emissionsbild, bei dem nur die Oktaederflächen sehr hell erscheinen (vgl. 4), Abb. 5a). Dampft man auf eine solche sauerstoffbeladene Spitze Magnesium auf, so genügt schon eine Feldstärke von  $4 \cdot 10^7$  Volt/cm, um eine erste Änderung des Feldelektronen-Emissionsbildes zu erzielen. Diese Änderung besteht darin, daß ganz ähnlich wie bei der Einwirkung des positiven Feldes auf eine oxydierte Wolframspitze [vgl. 4), Abb. 5], auf die kein Metall aufgedampft wurde, im Bereich der Oktaederflächen dunkle Flecke auftreten. Diese dunklen Flecke, also diejenigen Teile der Spitzenoberfläche, die jetzt weniger Elektronen emittieren als vorher, sind offenbar diejenigen Stellen, von denen das Magnesium abgerissen worden ist; sie nehmen aber von außen nach innen schnell an Größe ab, um schließlich ganz zu verschwinden, wenn man die negative Spitzenspannung nicht sofort wieder abschaltet. (Auf die entsprechenden dunklen Flecke, die man an oxydierten Wolframspitzen ohne aufgedampftes Metall beim Abreißversuch erhält, hat dagegen die negative Spitzenspannung keinerlei Einfluß!) Die Magnesiumatome wandern demnach unter der Einwirkung des negativen Feldes von den Randbereichen, wo sie nicht abgerissen worden sind, nach innen und füllen die dunklen (111)-Flächen allmählich wieder auf. Legt man wieder eine positive Spannung von derselben Höhe an, so treten wieder die gleichen dunklen Flecke auf den (111)-Flächen auf.

### 2. Magnesium auf reiner Wolframoberfläche

Ganz andere Verhältnisse erhält man, wenn man das Magnesium bei möglichst niedrigem Druck auf eine Wolframspitze verdampft, die frei von Verunreinigungen ist. Befindet sich die Spitze während der Verdampfung des Magnesiums auf Zimmertemperatur oder nur wenig darüber, so bildet sich um

<sup>12)</sup> H. A. Ritter, Diss. Köln 1955.

<sup>13)</sup> E. W. Müller, Z. Physik **120**, 270 (1943).

<sup>14)</sup> M. Drechsler u. E. Henkel, Z. Angew. Phys. **6**, 341 (1954).

<sup>15)</sup> A. Sommerfeld u. H. Bethe, Hdbuch. d. Phys. XXIV 2, S. 438 u. f.



die (011)-Fläche des Wolframs ein heller Ring aus; auch die  $(\bar{1}01)$ - und  $(\bar{1}10)$ -Flächen werden von hellen Ringen umrahmt (Abb. 1). Mit zunehmender Bedeckung werden die Ringe in Richtung der (111)- und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ -Flächen besonders breit, während sie in Richtung zur (001)- und (010)-Fläche Einkahlungen aufweisen.

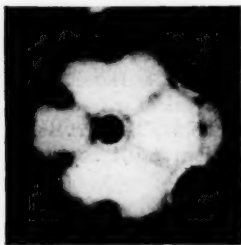


Abb. 1. Dünne Mg-Schicht auf reiner Wolframspitze

Die (112)-Fläche und die dazu gleichwertigen zeigen bei niedriger Bedeckung keine Umrandung; bei etwas erhöhtem Bedeckungsgrad und besonders deutlich bei erhöhter Temperatur finden sich in der Nachbarschaft von (010), (111) und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  sichelartige Gebilde, die neben (111) und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  breiter sind als neben (010). Ähnliche Erscheinungen wurden von M. Drechsler<sup>16)</sup> beim Aufdampfen von Barium beobachtet und auf die Verschiedenheit der einzelnen Platzwechselenergien zurückgeführt.

Die erste Änderung des Emissionsbildes unter der Einwirkung des positiven Feldes, nämlich das teilweise oder völlige Verschwinden des Ringes um (011), tritt jetzt bei einer Feldstärke von etwa  $6 \cdot 10^7$  Volt/cm ein. Nach dem völligen Abreißen des Magnesiums zeigt das Emissionsbild wieder den länglichrechteckigen (011)-Fleck der reinen Wolframspitze (Abb. 2).

Bei dünnen Mg-Schichten wurde der zentrale Ring meist im Ganzen abgerissen. Bei dickeren Schichten dagegen wurde er zuerst nach den Oktaederflächen hin abgebaut, während er an den Würfel-

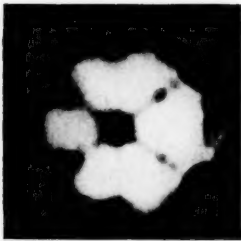


Abb. 2. Die dünne Mg-Schicht von Abb. 1 ist durch ein elektrisches Feld von  $6 \cdot 10^7$  Volt/cm vom (011)-Bereich der Spitze (Mitte des Bildes) abgerissen worden

flächen hin abgebaut, während er an den Würfel-

flächen noch erhalten blieb. Die Feldstärke, die erforderlich war, um einen Abreißeffekt dicht außerhalb des Rings um die (011)-Fläche zu erhalten, betrug im Mittel  $8,9 \cdot 10^7$  Volt/cm.

Mit zunehmender Bedeckung steigt die Abreißfeldstärke zunächst annähernd linear, dann immer langsamer an, um schließlich auf einem konstanten Wert zu bleiben, der um etwa  $1 \cdot 10^7$  Volt/cm höher liegt wie der an dünnen Schichten erhaltene.

Der erwähnte Ring um die (011)-Fläche entsteht offenbar dadurch, daß durch örtliche Anhäufung von Mg-Atomen eine Erhöhung der effektiven Feldstärke verursacht wird. Nach W. Schottky<sup>17)</sup> müßte man deshalb die berechnete Feldstärke mit einem „Grobfeinfaktor  $\beta$ “ multiplizieren. Da aber der Grobfeinfaktor unbekannt ist, benutzen wir zur Auswertung diejenige außerhalb des (011)-Ringes, also an einer Stelle, an der der Grobfeinfaktor zu 1 angenommen werden kann, der erste Abreißeffekt auftritt.

Vergrößert man die Abreißfeldstärke um etwa 15–20% gegenüber dem Wert, der zum Abreißen des (011)-Ringes erforderlich ist, so wird als erstes

<sup>16)</sup> M. Drechsler, Z. Elektrochem. **58**, 334 (1954).

<sup>17)</sup> W. Schottky, Z. Physik **14**, 63 (1923).

die Magnesiumbedeckung der (111)-Flächen abgerissen, und zwar von der Nachbarschaft der (011)-Fläche her. Bei einer Steigerung der Abreibfeldstärke um 35–45% des Anfangswertes wird das Magnesium auch von den Würfelflächen abgerissen.

### 3. Getemperte Magnesiumschichten

Erhitzt man eine mit einer dünnen Magnesiumschicht bedeckte Spitze für wenige Minuten auf etwa 600 °C, so zieht sich quer durch die Würfelflächen in Richtung auf (011) eine dunkle Linie. Der dunkle Fleck auf der (011)-Fläche ist größer als unter gleichen Verhältnissen bei einer ungetemperten Spitze und hat die Form eines Sechsecks. Um an einer so getemperten Spitze die erste merkliche Änderung des Emissionsbildes zu erzielen, braucht man eine Feldstärke von  $8,5 \cdot 10^7$  Volt/cm, also eine um etwa 5% niedrigere Feldstärke als an der gleichen Stelle der Oberfläche bei ungetempertem Magnesium. Die Änderung besteht hier darin, daß das Magnesium zuerst auf den Verbindungsgeraden von (011) nach (112) abreißt (Abb. 3). Bei mehrfach hintereinander an der gleichen Spitze wiederholten Abreibversuchen mit getempertem und ungetempertem Magnesium lagen die Abreibfeldstärken an getemperten Schichten durchweg um 4–6% niedriger als diejenigen an ungetemperten Magnesiumschichten.

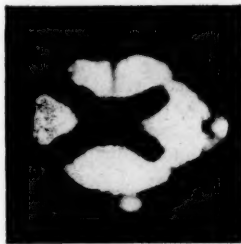


Abb. 3. Bei 600 °C getemperte Mg-Schicht, durch ein elektrisches Feld von  $8,5 \cdot 10^7$  Volt/cm abgerissen

### 4. Rubidium

Das zu verdampfende Rubidium wurde durch Erhitzen von Rubidiumchromat gewonnen. Die Verdampfung des Rb konnte mit einem Hilfsglühfaden kontrolliert werden, ohne daß es nötig war, während der Verdampfung die Feldelektronenemission der Spitze zu beobachten. Da beim Erhitzen des  $\text{RbCrO}_4$  erheblich größere Gasmengen frei wurden als bei der Verdampfung eines Metalls aus einer Wolframwendel, konnten bei den Versuchen mit Rubidium keine so hohen Ansprüche an die Güte des Vakuums gestellt werden wie bei den Versuchen mit Magnesium und Silber. Infolgedessen waren auch die gemessenen Abreibfeldstärken hier weniger gut reproduzierbar als beim Magnesium und Silber. Das Abreißen der Rb-Schichten erfolgte zwar so, daß eine scharfe Grenze gegenüber dem nicht abgerissenen Teil entstand; es ließ sich dabei aber keine Bevorzugung bestimmter Ebenen, wie beim Mg, erkennen. Die Abreibfeldstärke stieg von  $1,2 \cdot 10^7$  Volt/cm bei den dünnsten Schichten bis auf  $3 \cdot 10^7$  Volt/cm bei dickeren Schichten an.

### 5. Silber

Beim Silber war die Abreibfeldstärke in ähnlicher Weise von der Reinheit der aufgedampften Schicht und der Güte des Vakuums abhängig wie beim Magnesium. Wurde das Silber ohne die auf S. 281/2 beschriebenen Vorsichtsmaßnahmen, also bei einem Druck von  $10^{-6}$  bis  $10^{-7}$  Torr, aufgedampft, so zeigte das Emissionsbild eine mehr oder weniger körnige Struktur, die sich

manchmal auch erst nachträglich herausbildete, und zwar zuerst auf den Oktaederflächen und später auf den Würfelflächen. An solchen Silberschichten tritt schon bei einer Feldstärke von  $8,2 \cdot 10^7$  Volt/cm die erste Änderung des Emissionsbildes ein, wobei die wenig emittierende Umgebung der (112)-, (123)- und (134)-Flächen zusammen mit der (011)-Fläche ein schwarzes Kreuz bildet.

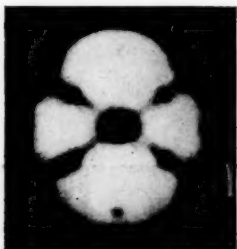


Abb. 4. Dünne Ag-Schicht, im Höchstvakuum auf W aufgedampft

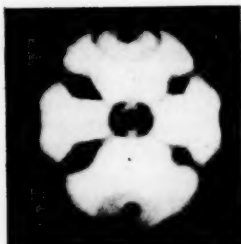


Abb. 5. Etwas dickere Ag-Schicht, unter gleichen Bedingungen wie bei Abb. 4 aufgedampft

Bei genügend niedrigem Druck aufgedampfte Silberschichten liefern gleichmäßige Emissionsbilder, die auf eine glatte Oberfläche schließen lassen. Die den (112)-Flächen entsprechenden dunklen Flecke haben dann eine rautenähnliche Form (Abb. 4). Bei zunehmender Dicke der Schicht zeigt das Emissionsbild eine deutlichere Struktur, insbesondere in der Umgebung der (001)- und (010)-Richtung (Abb. 5). Erfolgt das Aufdampfen von der (010)-Fläche gegen die heller emittierende weitere Umgebung deutlich abgeschattet; auch die Umgebung der (001)-Richtung emittiert noch deutlich stärker wie die Umgebung von (010). Unter der Einwirkung einer positiven Spitzenspannung bildet sich manchmal ein heller Ring um (011). Bei Erhöhung der Feldstärke wird dann das Silber zuerst von diesem Ring und anschließend von den (123)-Flächen abgerissen. Daß aber gleichzeitig auch das Silber von der weiteren Umgebung der Würfelflächen abgerissen wird, läßt sich daraus schließen, daß nach dem Abreißen die nähere Umgebung von (010) heller erscheint wie der daran angrenzende Bereich, während sie vorher dunkler

erschien. Zum Abreißen des Rings war im Mittel eine Feldstärke von  $10,3 \cdot 10^7$  Volt/cm, zu der Desorption des übrigen, gleichmäßig verteilten Silbers eine solche von  $10,9 \cdot 10^7$  Volt/cm erforderlich.

#### 6. Abreißversuche bei tiefen Temperaturen

Mit der in flüssige Luft getauchten Entladungsröhre (vgl. S. 281) wurde die Frage geprüft, inwieweit bei der Temperatur der flüssigen Luft ( $-193^\circ\text{C}$ ) eine merkliche Erhöhung der Abreißfeldstärke eintritt. Hierzu wurden die kritischen Feldstärken jeweils zuerst bei Raumtemperatur, dann bei der Temperatur der flüssigen Luft und schließlich wieder bei Raumtemperatur ermittelt.

Beim Magnesium betrug die durch die Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft bewirkte Erhöhung der Abreißfeldstärke für den zentralen (011)-Ring 15–19%, für das Mg auf den (111)-Flächen und die ersten Spuren des Abreißvorgangs auf den (001)-Flächen 10–15%. Beim Rubidium ergab sich dagegen bei der Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft nur eine Vergrößerung der Abreißfeldstärke um 5–10% gegenüber dem Wert, der bei Raumtemperatur unter den gleichen Bedingungen erhalten wurde.

Dieses Ergebnis war unabhängig davon, ob zur Kontrolle des Abreißvorgangs die Änderung des Feldelektronenstroms beobachtet oder ob das Aussehen des Emissionsbildes zum Vergleich herangezogen wurde.

### 7. Strommessungen bei positiv geladener Spitze

Da bei Rubidiumatomen wegen der niedrigen Ionisationsspannung die Bedingungen für eine Ionisation im elektrischen Feld der Spitze besonders günstig sind, sollte es möglich sein, die Feldionisation von Rubidiumdampf durch Messungen des Ionenstroms bei positiver Spitze zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde aus dem  $\text{RbCrO}_4$ -Vorrat mehrfach Rubidium verdampft, bis sich ein größerer Vorrat von Rubidium auf der Innenwand des Kolbens niedergeschlagen hatte. Der ganze Kolben wurde dann in einen elektrischen Ofen gebracht, dessen Innentemperatur schrittweise gesteigert wurde. Der Ionenstrom wurde dann bei angelegter positiver Spitzenspannung im Temperaturbereich von 90–225 °C gemessen; er stieg in diesem Bereich um fast drei Zehnerpotenzen an. Bei einer Spitzenspannung von 8 kV wurde beispielsweise bei 90 °C ein Strom von  $1,5 \cdot 10^{-9}$  A gemessen; bei 214 °C war der Strom bei der gleichen Spannung auf  $6 \cdot 10^{-7}$  A angestiegen. Um Störungen durch die bei höheren Temperaturen merkliche Leitfähigkeit des Glases auszuschließen, wurden Leitfähigkeitsmessungen an einer gleichen Apparatur, die kein Rubidium enthielt, im gleichen Temperaturbereich durchgeführt.

Wenn man annimmt, daß alle aus dem Dampfraum auf eine bestimmte Fläche an oder vor der Wolframspitze auftretenden Rubidiumatome ionisiert werden, dann sollte man erwarten, daß der Ionenstrom bei vorgegebener Spannung proportional dem Dampfdruck  $p$  ist. Aus der Clausius-Clapeyronschen Gleichung ergibt sich bekanntlich durch Integration die van't Hoffsche Gleichung

$$p = p_0 \exp(A/R(1/T_0 - 1/T)),$$

wobei  $A$  die Verdampfungswärme,  $R$  die allgemeine Gaskonstante und  $p_0$  den Dampfdruck bei der Temperatur  $T_0$  bedeuten. Trägt man den Logarithmus der gemessenen Ionenstromstärke als Funktion von  $1/T$  auf (Abb. 6), so erkennt man an dem geradlinigen Teil der Kurven, daß in einem gewissen Temperaturbereich tatsächlich die obigen einfachen Voraussetzungen erfüllt sind. Quantitative Schlüsse über die Ionisierungswahrscheinlichkeit der Rubidiumatome lassen sich aber aus den vorliegenden Messungen nicht ziehen, weil der Stromanteil von Sekundärelektronen, die im Dampfraum und an der Glaswand gebildet werden können, nicht bekannt ist.

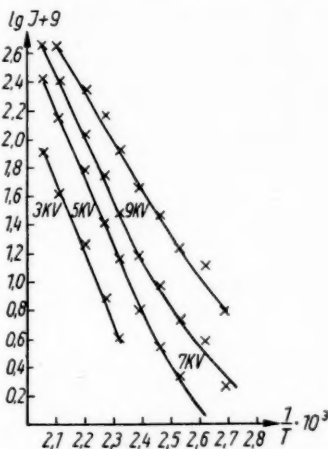


Abb. 6. Rubidium-Ionenstrom bei verschiedenen Spannungen als Funktion der Temperatur

## V. Diskussion der Versuchsergebnisse

## 1. Bildkraft und Bindungsenergie der Ionen an der Metalloberfläche

Wenn infolge einer positiven elektrischen Aufladung der Wolframspitze von ihrer Oberfläche Teilchen abgerissen werden, so müssen diese Teilchen während des Abreißvorgangs positiv geladen sein; denn auf polarisierte Teilchen, also auf elektrische Dipole, die durch Influenz im Felde entstehen und deren Gesamtladung Null ist, verursacht die Inhomogenität des Feldes vor der Spitze eine Kraftwirkung, die nicht von der Spitze weg, sondern auf sie zu gerichtet ist. Auf ein elektrisch geladenes Teilchen, das sich vor einer Metalloberfläche befindet, wirkt aber bekanntlich die sogenannte Bildkraft, und diese Bildkraft muß daher beim Abreißvorgang durch die Kraft, die von dem äußeren elektrischen Feld auf das Teilchen ausgeübt wird, überwunden werden. Da das Teilchen außer durch die Bildkraft auch noch durch andere Kräfte an die Oberfläche gebunden sein kann, sollte demnach die von dem äußeren elektrischen Feld herrührende Kraft  $eF$  mindestens ebenso groß, bzw. größer sein als die Bildkraft  $e^2/4x^2$ , damit das Teilchen von der Oberfläche abgerissen werden kann. Da nun ein auf der Metalloberfläche befindliches Teilchen, etwa ein adsorbiertes Atom eines anderen Metalls (z. B. Mg oder Ag), im allgemeinen nicht elektrisch geladen ist, muß es durch das angelegte elektrische Feld erst ionisiert werden<sup>5)</sup>, damit es überhaupt abgerissen werden kann; nur im Falle von auf Wolfram adsorbiertem Kalium, Rubidium und Caesium kann man annehmen, daß die adsorbierten Teilchen auch ohne äußeres Feld schon ionisiert sind, weil nämlich die Ionisierungsarbeit der freien Atome in diesem Falle kleiner ist als die Elektronenaustrittsarbeit aus dem Wolfram. Wenn die Ionisierungsarbeit des freien Atoms nicht viel größer ist als die Elektronenaustrittsarbeit aus dem Wolfram, wie im Falle des Ba, dann kann wegen der Verbreiterung, die der Energieterm des Grundzustands bei der Annäherung des Atoms an die Metalloberfläche erfährt, auch eine partielle Ionisierung des Adatoms eintreten, wobei der Ionisierungsgrad davon abhängen wird, welcher Bruchteil des verbreiterten Energiebandes höher liegt als das Fermi-niveau des Metalls. Für unseren Vergleich der Bildkraft mit der Kraft des äußeren Feldes darf man sich aber eine solche partielle Ionisation offenbar nicht so vorstellen, als ob Bildkraft und äußere Kraft irgendeines Bruchteils der Elementarladung miteinander in Konkurrenz ständen, sondern das Teilchen ist offenbar zu gewissen Teilen ungeladen und zu anderen Zeiten trägt es genau eine Elementarladung; infolgedessen bleibt die oben aufgestellte Bilanz unverändert, weil Bildkraft und äußere Kraft nur während derjenigen Zeit in Konkurrenz treten, während der das Teilchen tatsächlich eine Elementarladung trägt. Nimmt man also an, daß die Ladung des adsorbierten Teilchens gleich einer Elementarladung und daß sein Abstand  $x$  von der Metalloberfläche gleich dem „Atomradius“, nämlich gleich der Hälfte des kürzesten Abstandes benachbarter Atome im Kristallgitter des dem adsorbierten Teilchen entsprechenden Metalles ist, so erhält man durch Gleichsetzung von äußerer Feldkraft  $eF$  und Bildkraft  $e^2/4x^2$  für die hier untersuchten Metalle Rb, Mg und Ag die in der folgenden Tabelle aufgeführten „Mindestabreißfeldstärken“.

Die obigen einfachen Überlegungen können offenbar nur unter solchen Bedingungen angewendet werden, unter denen die adsorbierten Atome nur

Rubid  
Magne  
Silber

einen  
Tabell  
einget  
zeigt,  
der au  
wartet  
weisen  
Bildkr

In  
gesetz  
die um  
nen u  
einstir  
adsorb  
der le  
werden  
nisse u  
Atome  
Mulde  
(vgl. S  
flächen  
als an  
nahme  
läßt si  
des ein  
render  
stärke

W  
gebun  
erford  
einfac  
Bindu  
vergle  
angege  
folgen  
Mg-At  
Um d  
aufge  
Elekt  
der F

Element	Atomradius (in $10^{-8}$ cm)	daraus berechnete Abreißfeldstärke (in $10^7$ Volt cm)	gemessene Abreißfeldstärke (in $10^7$ Volt cm)
Rubidium . . . . .	2,53	5,6	1,2
Magnesium . . . . .	1,60	14,1	8,9
Silber . . . . .	1,44	17,4	10,9

einen kleinen Teil der Wolframoberfläche bedecken. In die letzte Spalte der Tabelle sind deshalb die an dünnen Schichten gemessenen Abreißfeldstärken eingetragen. Der Vergleich der Zahlenwerte in den letzten beiden Spalten zeigt, daß die gemessenen Werte der Abreißfeldstärken in der Größenordnung der aus den Atomradien berechneten Werte liegen, und daß sie auch die erwartete Abhängigkeit vom Atomradius des abzureißenden Teilchens aufweisen. Aus dieser qualitativen Übereinstimmung läßt sich schließen, daß die Bildkraft beim Abreißvorgang tatsächlich eine entscheidende Rolle spielt<sup>6)</sup>.

In die obige Tabelle sind die bei Raumtemperatur gemessenen Werte eingesetzt. Mit den bei der Temperatur der flüssigen Luft gemessenen Werten, die um 5 bis 15% höher liegen (vgl. S. 286), wird der Unterschied der gemessenen und berechneten Werte noch etwas geringer. Eine quantitative Übereinstimmung ist aber schon deshalb nicht zu erwarten, weil der Abstand des adsorbierten Atoms von der Metalloberfläche wegen der atomaren Struktur der letzteren gar nicht scharf definiert ist. Die tatsächlichen Verhältnisse werden jedoch den bei der Rechnung angenommenen einfachsten Verhältnisse um so näher kommen, je glatter die Oberfläche, d. h. je dichter sie mit Atomen besetzt ist und je weniger infolgedessen das Adatom in Senken oder Mulden Platz finden kann. In der Tat haben die Messungen ergeben (vgl. S. 284—286), daß die Abreißfeldstärken von reinen Wolframoberflächen an den weniger dicht besetzten (001)- und (111)-Flächen größer sind als an der am dichtesten besetzten (011)-Fläche. Auch die beobachtete Zunahme der Abreißfeldstärke mit dem Bedeckungsgrad (vgl. S. 284—286) läßt sich mit der Bildkraft qualitativ erklären: wenn nämlich zu der Bildkraft des einzelnen Ions noch die von den Bildladungen der Nachbarionen herrührenden Anziehungskräfte hinzukommen, muß eine entsprechend höhere Feldstärke aufgewendet werden, um das Ion abzureißen.

Wenn das betrachtete Ion nur durch die Bildkraft an die Metalloberfläche gebunden ist, läßt sich seine Bindungsenergie bzw. die für die Abtrennung erforderliche Arbeit — also die „Verdampfungswärme“ des Ions — durch eine einfache Integration aus der Abreißfeldstärke berechnen. Die so berechnete Bindungsenergie kann man nun mit derjenigen Verdampfungswärme der Ionen vergleichen, die sich auf Grund eines zuerst von Langmuir und Kingdon<sup>18)</sup> angegebenen Kreisprozesses ermitteln läßt. Dieser Kreisprozeß beruht auf folgender Überlegung: Wenn z. B. ein auf der Wolframoberfläche adsorbiertes Mg-Atom verdampft, so wird dabei die Verdampfungswärme  $A_w$  verbraucht. Um das verdampfte Mg-Atom zu ionisieren, muß seine Ionisierungsenergie aufgewendet werden. Läßt man nun das bei der Ionisierung freigewordene Elektron wieder in das Wolframmetall eintreten, so gewinnt man den Betrag der Elektronenaustrittsarbeit  $\varphi$  und schließlich wird bei der Anlagerung

<sup>18)</sup> I. Langmuir u. K. H. Kingdon, Proc. Roy. Soc. (London) **107**, 61 (1925).



des Mg-Ions an die  $W$ -Oberfläche die „Verdampfungswärme“  $\varphi^+$  des Mg-Ions von der  $W$ -Oberfläche frei. Von den in diesen Kreisprozeß eingehenden Größen sind  $J$  und  $\varphi^-$  genau bekannt; weniger genau bekannt ist aber  $\Lambda_W$ , die Verdampfungswärme des Magnesiums von einer Wolframoberfläche. Da andererseits die Verdampfungswärmen von Mg, Rb und Ag vom kompakten Metall aus den Dampfdruckkurven ziemlich genau ermittelt sind, erscheint es zweckmäßiger, den Langmuir-Kingdonschen Kreisprozeß auf „dicke“ Schichten anzuwenden, bei denen man mit der gewöhnlichen Verdampfungswärme rechnen kann. In der folgenden Tabelle sind für die hier untersuchten Metalle Rb, Mg und Ag und für Ba und W, deren Abreißspannungen von E. W. Müller gemessen worden sind<sup>19)</sup>, die in den Kreisprozeß eingehenden Werte von  $\Lambda$ ,  $J$  und  $\varphi^-$  nach den Tabellen von Landolt-Börnstein und der sich aus ihnen ergebende Wert  $\varphi^+ = \Lambda + J - \varphi^-$  zusammengestellt (in e-Volt). Beim Vergleich der Zahlenwerte in den beiden letzten Spalten der Tabelle erkennt

Element	Verdampfungswärme	Ionisationsenergie	Elektr. Austrittsarbeit	Verdampfungswärme	Bindungsenergie aus Abreißfeldstärke
Rubidium	0,95	4,17	2,1	3,02	0,80
Magnesium	1,57	7,64	3,7	5,51	1,54
Silber . . .	3,02	7,58	4,70	5,9	1,57
Barium . . .	1,78	5,21	2,52	4,47	3,15
Wolfram . .	8,79	8,1	4,52	12,37	7,05

man, daß die aus Verdampfungswärme, Ionisierungsenergie und Elektronenaustrittsarbeit auf Grund des Langmuir-Kingdonschen Kreisprozesses berechnete Verdampfungswärme der Ionen in allen Fällen erheblich größer ist wie ihre aus der gemessenen Abreißfeldstärke berechnete Bindungsenergie. Da die Abreißkraft nicht nur der Bildkraft, sondern auch den sonst etwa noch vorhandenen Bindungskräften das Gleichgewicht hält, scheint der zu kleine Wert der mit dem quadratischen Kraftgesetz berechneten Bindungsenergie den Schluß nahezu legen, daß die Gesamtbindungskraft des Ions vor der Metalloberfläche langsamer als mit dem Quadrat des Abstandes von der Oberfläche abnimmt. Eine solche Kraft kann aber offensichtlich nur von einer praktisch gleichmäßig über die Oberfläche verteilten negativen Ladung geliefert werden.

Bei unseren Überlegungen haben wir stets angenommen, daß die gemessene Abreißfeldstärke primär ein Maß für die zu überwindende Bindungskraft des Ions liefert und daß die Temperaturbewegung der Ionen bei Raumtemperatur nur von sekundärer Bedeutung ist. Den umgekehrten Weg, nämlich die Behandlung der Felddesorption als „Verdampfung der Ionen über einen durch den Schottky-Effekt erniedrigten Potentialberg“, hat E. W. Müller in einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>19)</sup> gewählt. Zur Deutung seiner Felddesorptionsversuche mit Barium, Thorium, Sauerstoff und Wolfram nimmt er an, daß die Zeit, die ein Ion braucht, um einen „Potentialberg“ zu überwinden, näherungsweise gegeben sei durch

$$\tau = \tau_0 \cdot e^{\frac{Q}{kT}},$$

<sup>19)</sup> E. W. Müller, Physic. Rev. **102**, 618 (1956).



worin  $\tau_0$ , die „mittlere Schwingungsdauer“ des Ions, gleich  $10^{-13}$  sec gesetzt wird. Die von ihm auf diesem Wege berechneten Abreißfeldstärken stimmen mit den von ihm gemessenen Werten überein. Aus der Übereinstimmung zieht er den Schluß, daß das Barium bei der Felddesorption die Wolframspitze als doppelt geladenes Ion verlassen müsse — während nach unserer Deutung des Abreißvorgangs das Bariumatom während seiner Felddesorption von der Wolframoberfläche nur einfach positiv geladen ist, ebenso wie die von uns untersuchten Rb-, Mg- und Ag-Atome.

## 2. Zur Deutung der Abreißversuche an oxydierten Wolframspitzen

Aus den Versuchen hatte sich ergeben (vgl. S. 283 u. 285/6), daß schon bei Anwesenheit einer geringen Menge von Sauerstoff auf der Wolframoberfläche eine merkliche Erniedrigung der Abreißfeldstärke eintritt. Diese Beobachtung wird qualitativ verständlich, wenn man beachtet, daß die für den Abreißvorgang notwendige Ionisation der adsorbierten Atome erleichtert wird, wenn die Austrittsarbeit des Wolframs durch Sauerstoffbindung in der Oberfläche erhöht ist. (Bei Versuchen über die thermische Ionenemission ist von Langmuir und Kingdon<sup>18)</sup> schon vor längerer Zeit festgestellt worden, daß Kupferatome, die auf einen oxydierten glühenden Wolframdraht auftreffen, den Draht als Ionen wieder verlassen.)

Bei den unter IV, 1 beschriebenen Abreißversuchen von Magnesium auf oxydierten Wolframspitzen, bei denen etwas größere Mengen von Sauerstoff vorhanden waren, kommen aber auch noch andere Ursachen für die beobachtete Erniedrigung der Abreißfeldstärke in Betracht. Wenn eine mit adsorbiertem Sauerstoff bedeckte Spitze oder eine reine W-Spitze bei Gegenwart von wenig Sauerstoff auf etwa 1600 °C erhitzt wird, so bildet sich eine dünne Oberflächenschicht von Wolframoxyd. Diese Oberflächenschicht, die zur Folge hat, daß im Feldelektronenbild nur noch die Oktaederflächen hell erscheinen, kann schon durch mäßige Feldstärken abgerissen werden. Dampft man nun auf eine solche Wolframspitze mit dünner Oxydschicht Magnesium auf, so stimmt die Abreißfeldstärke des Magnesiums mit derjenigen überein, die man an der nicht mit Metall bedampften Oxydspitze erhält; das aufgedampfte Magnesium wird also offenbar zusammen mit der leichter abreißbaren Oxydschicht abgerissen. Die verhältnismäßig leichte Abreißbarkeit der Wolframoxyschichten von den Oktaederflächen kann folgendermaßen erklärt werden. Das Wolframoxydgitter ist, wenn man von gewissen kleinen Abweichungen absieht, aus Würfeln aufgebaut, in deren Ecken jeweils die Wolframatom- und in deren Kantenmitten die Sauerstoffatome sitzen. Schreitet man in einem solchen Gitter senkrecht zur (111)-Fläche vorwärts, so stößt man abwechselnd auf solche Netzebenen, die nur mit Wolframatom- und auf solche, die nur mit Sauerstoffatomen belegt sind. Da nun infolge der Elektronenaffinität des Sauerstoffs die äußeren Elektronen der Wolframatom- ohnehin schon in Richtung nach den Sauerstoffebenen, also senkrecht zur (111)-Fläche verschoben sind, wird offenbar die für den Abreißvorgang erforderliche Ionisierung der Wolframatom- gerade für ein senkrecht zur (111)-Fläche wirkendes elektrisches Feld erleichtert. In der Tat zeigen die Beobachtungen, daß der Abreißvorgang sowohl bei der nicht bedampften, wie auch bei der mit Magnesium bedampften Wolframoxyspitze in der Mitte der (111)-Fläche

beginnt, während Magnesium, das auf eine reine Wolframspitze aufgedampft ist, zuerst in der Nähe der (011)-Ebene abgerissen wird (vgl. S. 284).

Es muß freilich hier noch darauf hingewiesen werden, daß von entscheidender Bedeutung für die leichte Abreißbarkeit der Oxydschicht noch die Tatsache ist, daß es sich beim Wolframoxyd um einen Halbleiter handelt; nur dadurch ist es nämlich möglich, daß das angelegte Abreißfeld auch noch bis in eine gewisse Tiefe der Schicht wirksam wird.

Die hier für die Wolframoxyschichten gegebene Deutung der Abreißversuche läßt sich offenbar auch auf die Abreißversuche mit Wolframcarbid (vgl. 4), Abb. 4) übertragen, bei dem es sich ebenfalls um einen Halbleiter handelt.

### Zusammenfassung

Es wurden die Mindestfeldstärken gemessen, bei denen die Atome von aufgedampften dünnen Fremdschichten als Ionen von der Oberfläche einer Wolframeinkristallspitze abgerissen werden; zur Kontrolle des Abreißvorgangs wurde die Feldelektronenemission benutzt. Bei den untersuchten Metallen ist die gemessene Abreißfeldstärke von der gleichen Größenordnung und nimmt in derselben Reihenfolge (Rb—Mg—Ag) zu, wie die Bildkraft, die ein Ion des betreffenden Metalls erfahren würde, wenn es sich in demjenigen Abstand vor einer Metalloberfläche befindet, der dem kürzesten Abstand der Atome in seinem Kristallgitter entspricht.

Beim Rb wurde eine um 5–10%, beim Mg eine um etwa 15% höhere Abreißfeldstärke als bei Raumtemperatur gefunden, wenn der Abreißversuch bei der Temperatur der flüssigen Luft durchgeführt wurde. Die Felddesorption der adsorbierten Atome wird daher bei Raumtemperatur am besten als eine „Feldionenemission“ beschrieben, die durch den Temperatureinfluß etwas modifiziert ist; erst bei höheren Temperaturen geht die Felddesorption in eine durch den „Schottky-Effekt“ modifizierte Verdampfung über.

Die bei Annahme eines quadratischen Kraftgesetzes aus der gemessenen Abreißfeldstärke berechnete Bindungsenergie der Ionen ist erheblich kleiner, als die „Verdampfungswärme“ der Ionen, die man mit Hilfe eines zuerst von Langmuir und Kingdon vorgeschlagenen Kreisprozesses aus der Verdampfungswärme der Atome, der Ionisierungsspannung und der Elektronenaustrittsarbeit berechnet.

In Abhängigkeit vom Dampfdruck des Rb und von der Feldstärke wurde die Feldionisation von Rb-Atomen im elektrischen Feld einer Wolframspitze untersucht.

Dünne Mg-Schichten, auf oxydierte Wolframspitzen aufgedampft, werden in der gleichen Weise und bei derselben Feldstärke zuerst von den Oktaederflächen der *W*-Spitze abgerissen, wie dünne Wolframoxyd-Schichten. Die Gründe hierfür sind darin zu suchen, daß in der Richtung senkrecht zur (111)-Fläche des Wolframoxydgitters Netzebenen aufeinanderfolgen, die abwechselnd nur Metallatome und nur Sauerstoffatome enthalten und daß infolge der Halbleitereigenschaften des Wolframoxys das elektrische Feld auch in die Tiefe der Schicht eindringen kann.

Köln, I. Physikalisches Institut.

Bei der Redaktion eingegangen am 10. Januar 1960.

## Zur langwelligen Ultrarot-Emission von Gasentladungslampen

Von W. Boldt und H. Reimann

Mit 7 Abbildungen

### Inhaltsübersicht

Es wird über Messungen im langwelligen Ultrarotbereich berichtet, die an Quecksilber- und Xenon-Entladungslampen durchgeführt worden sind. Mit einer registrierenden Spektrometeranordnung wurde die relative spektrale Energieverteilung verschiedener Quecksilber- und Xenonbögen in Form kommerzieller Lampen im Wellenlängenbereich zwischen 100 und 800  $\mu$  untersucht.

### Meßanordnung

Die Untersuchung der Strahlungsquellen erfolgte mit dem schon früher beschriebenen Vakuum-Gitterspektrometer<sup>1)</sup>, das mit den sich als zweckmäßig erwiesenen Methoden des Wechsellichtsprinzips, der elektronischen Verstärkung und der Registrierung arbeitet<sup>2)3)4)</sup>.

Der Strahlengang des Gitterspektrometers geht aus Abb. 1 hervor. Es ist ein Autokollimationsstrahlengang, der deshalb gewählt wurde, um die Ausmaße der Meßapparatur und damit den Vakuumkessel möglichst klein zu halten. Die zu untersuchende Strahlungsquelle wird über einen kurzbrennweitigen Hohlspiegel auf den Eintrittsspalt  $Sp_1$  abgebildet. Vor dem Eintrittsspalt ist der Modulator — eine von einem Synchronmotor angetriebene Sektorenscheibe — und ein Filter zur Unterdrückung der unerwünschten kurzwelligen Strahlung angeordnet. Der Eintrittsspalt  $Sp_1$  steht im Brennpunkt des Spektrometerspiegels von 30 cm Durchmesser und 60 cm Brennweite. Zur Zerlegung der Strahlung stehen Echelette- und Laminargitter aus Aluminium mit verschiedenen Gitterkonstanten zur Verfügung. Sie haben

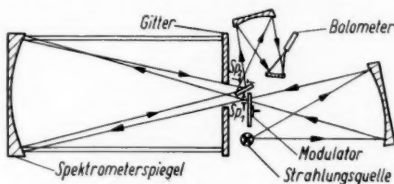


Abb. 1. Strahlengang des Vakuum-Gitterspektrometers

<sup>1)</sup> Vorgetragen von H. Reimann auf der Tagung „Optik aller Wellenlängen“ in Jena, November 1958.

<sup>2)</sup> L. Genzel u. W. Eckardt, Z. Physik **139**, 578 (1954).

<sup>3)</sup> H. Yoshinaga u. Mitarb., J. opt. Soc. Amer. **48**, 315 (1958).

<sup>4)</sup> N. G. Jaroslowski, Usp. fiz. Nauk. **62**, 159 (1957).

alle eine Größe von  $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$  und einen kreisförmigen Mitteldurchbruch von  $6 \text{ cm}$  Durchmesser. Die Drehung des Gitters erfolgt über ein Wechselgetriebe durch einen Synchronmotor. Das vom Spektrometerspiegel aus-

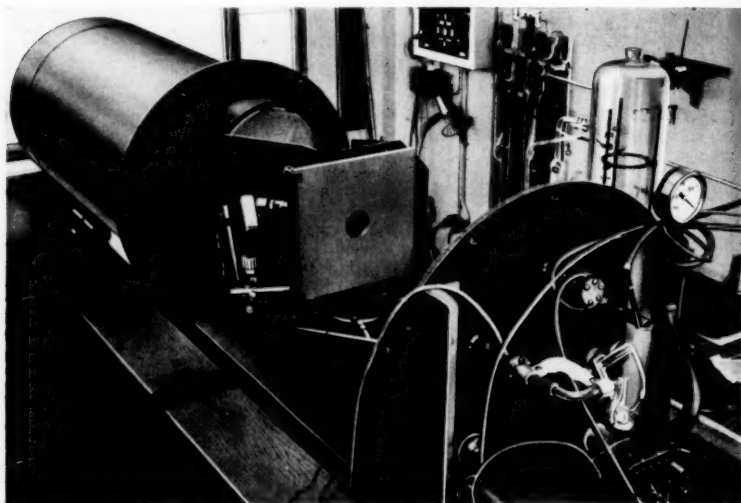


Abb. 2. Ansicht des Vakuum-Gitterspektrometers bei geöffnetem Vakuumkessel. Man erkennt deutlich in der Mitte das Gitter mit dem kreisförmigen Mitteldurchbruch. Links davon ist das Bolometer zu sehen

gehende parallele Strahlenbündel wird vom Gitter in der nullten Ordnung wieder auf den Spektrometerspiegel reflektiert, dort konvergent gemacht und auf den Austrittsspalt  $Sp_2$  abgebildet. Der Austrittsspalt  $Sp_2$  — hinter dem

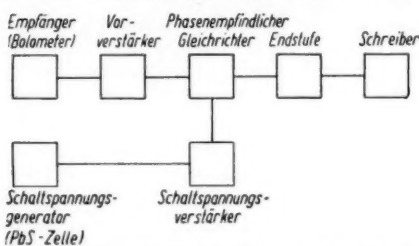


Abb. 3. Blockschaltbild der Verstärkeranlage

an die Frontplatte herangefahren und mit ihr vakuumdicht verschraubt. Der Vakuumkessel hat eine Länge von  $120 \text{ cm}$  und einen Innendurchmesser von  $60 \text{ cm}$ .

Das Blockschaltbild der benutzten Verstärkeranlage ist aus Abb. 3 ersichtlich. Hinter dem Strahlungsempfänger folgt als Vorverstärker ein 5-

ein weiteres Filter angeordnet ist — wird durch zwei Spiegel verkleinert auf den Strahlungsempfänger abgebildet. Als Strahlungsempfänger dient ein Vakuumbolometer mit einem Quarzfenster.

Abb. 2 zeigt die Spektrometeranordnung bei geöffnetem Vakuumkessel. Um das Gitterspektrometer evakuieren zu können, wird der Vakuumkessel

durch-  
Wech-  
el aus-

stufiger Selektivverstärker, dessen Bandbreite durch RC-Filter auf wenige Hz eingengt ist, um die Rauscheffekte soweit wie möglich zu unterdrücken<sup>5)</sup>. An dem Vorverstärker schließt sich eine phasenempfindliche Gleichrichterstufe an<sup>6)</sup>7). Die hierzu benötigte Schaltspannung wird von einer PbS-Zelle geliefert, die am Eintrittsspalt hinter dem Modulator angeordnet ist. Die weitere Bandbreiteneinengung wird durch einen Tiefpaß (RC-Glied) vorgenommen, mit dem verschiedene Zeitkonstanten zwischen 50 und 500 s eingestellt werden können, die zur Unterdrückung von kurzzeitigen Störungen notwendig sind. Darauf folgt dann die Gleichstromverstärkerstufe für das Registriergerät. Die Modulationsfrequenz beträgt 21 Hz.

Es sind gut gesiebte und stabilisierte Speisespannungen, sowie entsprechende Abschirmmaßnahmen notwendig, um Störeinflüsse soweit wie möglich auszuschalten.

### Ergebnisse

Es werden die vorläufigen Untersuchungsergebnisse verschiedener Strahlungsquellen mitgeteilt. Hierbei wurde davon ausgegangen, die zur Zeit verfügbaren kommerziellen Gasentladungslampen hinsichtlich ihrer spektralen Verteilung im langwelligen Ultrarot durchzumessen, um sie untereinander und mit den Ergebnissen anderer Arbeiten vergleichen zu können.

Nach den Veröffentlichungen mehrerer Autoren<sup>8)</sup>9) zeigt die Quecksilberentladung ihre stärkste Ultrarotemission im Druckbereich zwischen 1 und 10 Atm., wie es z. B. für das bei den meisten Arbeiten benutzte UV-Normal zutrifft. Von den uns zur Verfügung stehenden Lampen konnten wir bei dem UV-Strahler S 450 (frühere Bezeichnung: PRK 2) — eine dem UV-Normal ähnliche Lampe — die stärkste Emission im langwelligen Ultrarot feststellen. Abb. 4 und 5 zeigen die Registrierkurven einer Lampe vom Typ S 450, die sich aus der spektralen Energieverteilungskurve

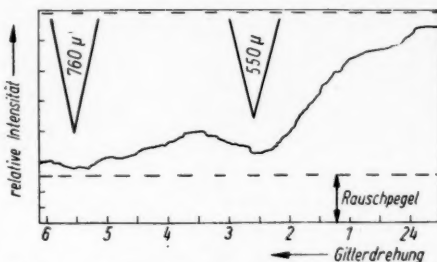


Abb. 4. Aufgenommen mit einem Laminargitter (Gitterkonstante: 4000  $\mu$ , Furchentiefe: 100  $\mu$ )

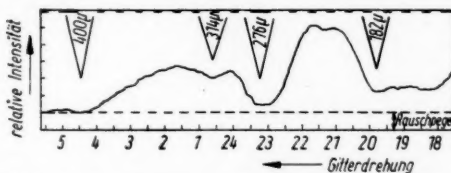


Abb. 5. Aufgenommen mit einem Laminargitter (Gitterkonstante: 2000  $\mu$ , Furchentiefe: 50  $\mu$ )

Abb. 4 u. 5. Spektrum des UV-Strahlers S 450

des Strahlers, der Gittercharakteristik und der Durchlässigkeitskurve der benutzten Filterkombinationen zusammensetzt. Die Einschnitte im Kurven-

<sup>5)</sup> H. Kindler, Exp. Techn. Physik **4**, 62 (1956).

<sup>6)</sup> I. Schuster, Rev. sci. Instrum. **22**, 254 (1951).

<sup>7)</sup> H. Lippmann, Exp. Techn. Physik **1**, 1 (1953).

<sup>8)</sup> W. Dahlke, Z. Physik **114**, 205 (1939).

<sup>9)</sup> G. Hettner, Z. Physik **131**, 385 (1952).

verlauf sind Absorptionslinien, die durch den in der Luft enthaltenen Wasserdampf hervorgerufen werden. Die oben eingezeichneten Dreiecke geben die Lage der stärksten Absorptionsliniengruppen an.

Aus Vorversuchen ergab sich, daß mit Ausnahme der Lampe vom Typ S 450, deren Emission bis  $800\ \mu$  gemessen werden konnte, bei allen Lampen nur im Wellenlängenbereich zwischen 100 und  $350\ \mu$  eine Emission mit ausreichender Intensität festzustellen war. Für die Messungen wurde aus diesem Grunde als Dispersionsmittel ein Echelettegitter mit einer Gitterkonstanten von  $1000\ \mu$  und einem Furchenwinkel von  $5^\circ$  benutzt, da dessen Gittercharakteristik für diesen Bereich am günstigsten ist.

In Abb. 6 sind die registrierten Spektren verschiedener Lampen bei gleichen Versuchsbedingungen zum Vergleich dargestellt. Alle Lampen wurden mit

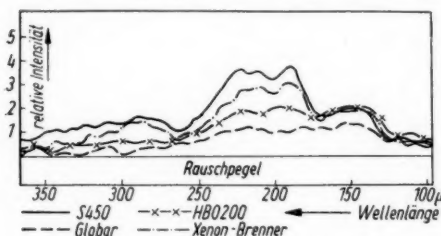


Abb. 6. Vergleichsspektren verschiedener Lampen

Silitstabes (Globar) als Temperaturstrahler. Die Emission des Silitstabes entspricht nach Brügel<sup>10)</sup> und Silvermann<sup>11)</sup> im nahen Ultrarot ziemlich genau 75% der eines gleichtemperierten Schwarzen Körpers.

Vergleicht man die beiden Quecksilberlampen nach ihren Spektren und berücksichtigt dabei die aufgenommene Leistung pro cm Bogenlänge und den Betriebsdruck, so erkennt man die Abnahme der Ultrarotemission mit größerer Leistungsaufnahme und größerem Druck. Hierauf wurde schon von Dahlke<sup>8)</sup> bei der Untersuchung des Quecksilberhochdruckbogens hingewiesen, der ein flaches Maximum der Emission in Abhängigkeit vom Druck bei einigen Atmosphären fand. Die Abnahme der Emission bei Drucken über 10 Atm. hat nach Hettner<sup>9)</sup> seine Ursache in der mit dem Druck zunehmenden Selbstabsorption des Bogenplasmas, die auch mit wachsender Wellenlänge stärker wird.

Die Ermittlung näherer Zusammenhänge zwischen Druck, Bogen temperatur und Emission bleibt weiteren Untersuchungen im Hochdruckbereich vorbehalten. Bohdansky<sup>12)</sup> fand im Druckbereich von 300 bis 750 Torr für die nicht durch Selbstabsorption modifizierte Strahlung im fernen Ultrarot einen stärkeren als druckproportionalen Anstieg der Emission.

Bei den durchgeführten Messungen an Xenon-Entladungslampen konnte ebenfalls eine langwellige Ultrarotemission registriert werden. Es ist anzunehmen, daß auch hier der Mechanismus der Strahlungsentstehung auf Bremsstrahlung freier Elektronen beruht, da bei den Xenonlampen die gleichen Eigenschaften in bezug auf Druckabhängigkeit wie bei den Quecksilberlampen zu erkennen

<sup>10)</sup> W. Brügel, Z. Physik **127**, 400 (1950).

<sup>11)</sup> S. Silvermann, J. Opt. Soc. Amer. **38**, 989 (1948).

<sup>12)</sup> J. Bohdansky, Z. Physik **149**, 383 (1957).



waren. In Abb. 7 sind die Spektren der Lampen vom Typ HQA 500 (Betriebsdruck:  $\sim 7$  at, Stromstärke: 1,5 A), HBO 50 (Betriebsdruck:  $\sim 75$  at, Stromstärke: 1,5 A) HBO 107 (Betriebsdruck:  $\sim 75$  at, Stromstärke: 4 A), XBO 50 (Betriebsdruck:  $\sim 45$  at, Stromstärke: 3 A), S 450 (Betriebsdruck:  $\sim 1,5$  at, Stromstärke: 4 A) und des Silitstabes (Temperatur:  $\sim 900^\circ\text{C}$ ) zusammengestellt.

Zu diesen Spektren ist folgendes festzustellen: Die vom Strahlungsempfänger aufgenommene Energie setzt sich aus der Strahlung der heißen Quarzwand — der sogenannten „Quarzstrahlung“ — und der eigentlichen Bogenstrahlung der Lampen zusammen. Das von uns registrierte Spektrum eines Temperaturstrahlers (Silitstab) bei  $900^\circ\text{C}$  läßt eine Abschätzung des Strahlungsanteils der Quarzwand zu, wenn die Quarzwandtemperatur bekannt ist.

Geht man von der Gültigkeit des Rayleigh-Jeansschen Strahlungsgesetzes für diesen langwelligen Spektralbereich aus, so ist die Emission eines Temperaturstrahlers bei einer festgehaltenen Wellenlänge seiner Temperatur direkt proportional. In der Lampenmitte des UV-Strahlers S 450 wurde mit einem Thermoelement eine Quarzwandtemperatur von  $615^\circ\text{C}$  gemessen. Durch Vergleich des Spektrums des UV-Strahlers S 450 mit dem Spektrum des Temperaturstrahlers bei  $900^\circ\text{C}$  findet man für den UV-Strahler S 450 bei  $200\mu$  ein Verhältnis von 1:4 zwischen Quarzwand- und Bogenstrahlung. Dahlke<sup>8)</sup> fand für die Quecksilbernornallampe von Osram bei einer mittleren Wellenlänge von  $300\mu$  ebenfalls ein Verhältnis von 1:4. Aus Abb. 7 ist deutlich zu ersehen, daß mit wachsender Wellenlänge dieses Verhältnis für die Bogenstrahlung des UV-Strahlers S 450 noch günstiger wird, weil sie weniger stark als die Temperaturstrahlung abfällt.

Bei den Höchstdrucklampen entsprechen die registrierten Spektren mehr dem Spektrum eines Temperaturstrahlers, da die Bogenstrahlung mit wachsender Wellenlänge infolge der zunehmenden Selbstabsorption des Bogenplasmas immer mehr abnimmt. Als Strahlungsquellen im langwelligen Ultrarot bieten also die Höchstdrucklampen keine besonderen Vorteile. Sie zeigen in diesem Bereich eine Emission, die von der eines üblichen Temperaturstrahlers (Silitstab) nicht wesentlich verschieden ist.

Berlin, Physikalisch-Technisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Bereich Strahlungsquellen.

Bei der Redaktion eingegangen am 31. Dezember 1959.

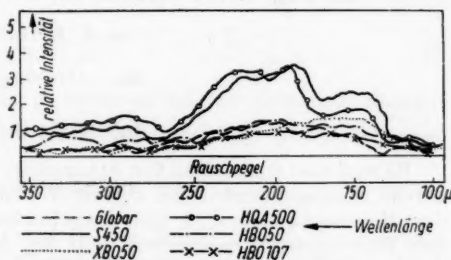


Abb. 7. Spektren verschiedener Lampen zur Abschätzung der sogenannten „Quarzstrahlung“

# **Experimentelle Bestimmung der Komponenten des Permeabilitätstensors und des spektroskopischen Aufspaltungsfaktors an Mg-Mn-Ferriten im Mikrowellengebiet. I**

Von K. H. Gothe

Mit 7 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Es wird über den Aufbau von Apparaturen zur experimentellen Bestimmung der Tensorkomponenten bei 3,2 cm Wellenlänge berichtet. Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit wird eine Zwischenfrequenzmethode angewendet und ihre Wirkungsweise beschrieben. Für Mg-Mn-Ferrite werden die Meßergebnisse angegeben und diskutiert. Zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit des  $g$ -Faktors wurden zusätzliche Messungen bei 1,25 cm Wellenlänge vorgenommen.

## **1. Einleitung**

Das Interesse, das in den letzten Jahren den Ferriten entgegengebracht wurde, liegt in ihren günstigen dielektrischen und magnetischen Eigenschaften begründet. Die Ferrite können sehr geringe dielektrische Verluste besitzen. Ihr spezifischer Ohmscher Widerstand kann größenordnungsmäßig  $10^{12}$  Ohm · cm betragen. Die Folge hiervon ist, daß elektromagnetische Wellen das Material fast verlustfrei durchdringen können. Für Untersuchungen des Problems der ferromagnetischen Resonanz eignen sich daher diese Materialien besonders gut. Solche Experimente bieten bei bekannten Entmagnetisierungsfaktoren der Meßproben eine neue Möglichkeit, neben den bekannten gyromagnetischen Experimenten von Barnett und Einstein-de Haas die Natur der elementaren Träger des magnetischen Moments der Ferromagnetica zu bestimmen. In neuerer Zeit werden die Ferrite in der Mikrowellentechnik in immer stärkerem Maße angewendet. Es lassen sich mit ihrer Hilfe neuartige Bauelemente herstellen wie z. B. Isolatoren und Zirkulatoren.

Bei all diesen Fragen ist das Problem der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem ferromagnetischen Medium zu klären. In einem engen Zusammenhang hiermit gilt es die Permeabilität und Dielektrizitätskonstante in Abhängigkeit vom magnetisierenden Feld zu bestimmen. Während die Dielektrizitätskonstante eine skalare Größe ist, hat die Permeabilität einen tensoriellen Charakter. Nach Polder<sup>1)</sup> besteht zwischen der Induktion  $b$

<sup>1)</sup> D. Polder, Philos. Mag. 40, 99–115 (1949).

und dem hochfrequenten Magnetfeld  $h$  der einfallenden Mikrowelle die Beziehung:

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -j\alpha & 0 \\ j\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Hierbei liegt das magnetisierende Gleichfeld in Richtung der  $z$ -Achse und die Einfallsebene der Mikrowelle ist die  $x, y$ -Ebene.

Für den Fall, daß das ferromagnetische Material gesättigt ist, erhält man für  $\mu$  und  $\alpha$  die Ausdrücke:

$$\mu = 1 + 4\pi\gamma^2 \frac{H M_0}{\gamma^2 H^2 - \omega^2}; \quad \alpha = \frac{4\pi M_0 \gamma \omega}{\gamma^2 H^2 - \omega^2}; \quad (2)$$

$\gamma = g \cdot \frac{e}{2m}$ ;  $e$ : Elementarladung;  $g$ : spektroskopischer Aufspaltungsfaktor;  $m$ : Masse des Elektrons;  $H$ : magnetisches Gleichfeld;  $M_0$ : Sättigungsmagnetisierung.

Hogan<sup>2)</sup> kommt durch Berücksichtigung der Verluste auf komplexe Ausdrücke für  $\mu$  und  $\alpha$ .

Im Bereich der Hysteresiskurve gelten diese Beziehungen nicht; man muß hierbei über die verschiedenen Magnetisierungsrichtungen mitteln. Nach solchen Überlegungen gelangte Rado<sup>3)</sup> ebenfalls zu einer tensoriellen Beziehung, bei der die Nebendiagonalelemente proportional dem Betrag der Magnetisierung sind.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden an Mg-Mn-Ferriten bei 3,2 cm Wellenlänge vorgenommen. Die Ferrite wurden nach den bekannten Methoden der Sinterung hergestellt. Ihre Herstellung besorgte uns freundlicherweise das Institut für magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

## 2. Meßmethode

Zur experimentellen Bestimmung der Tensorkomponente sind folgende Überlegungen maßgebend: Der Permeabilitätstensor kann durch Einführung eines rotierenden Koordinatensystems in seine diagonale Form gebracht werden. Das ist gleichbedeutend damit, daß für zirkularpolarisierte Wellen die Permeabilität eine skalare Größe wird:

$$b_x \pm j b_y = (\mu \pm \alpha) \cdot (h_x \pm j h_y) \quad (3)$$

$\pm$  Vorzeichen kennzeichnen den Drehsinn der Polarisationssebene.

Die Effekte der ferromagnetischen Resonanzabsorption sind bedeutend größer als die des paramagnetischen Analogons. Die Frage des Nachweises ist deshalb nicht so kompliziert zu lösen. Bei der Bestimmung der Komponenten des Permeabilitätstensors kommt es jedoch darauf an, sehr genaue Frequenzbestimmungen durchzuführen.

Die zu untersuchende Meßprobe wird nun am zweckmäßigsten in einen Hohlraumresonator gebracht. Der Hohlraumresonator wird mit zirkular-

<sup>2)</sup> C. L. Hogan, Bell Syst. Tech. J. **26**, 1–31 (1952).

<sup>3)</sup> G. T. Rado, Physic. Rev. **89**, 529 (1953).

polarisierten Wellen angeregt und der Einfluß der Meßprobe auf dessen Eigenschaften, damit ist gemeint seine Resonanzfrequenz und Güte, beobachtet. Die Probenform wird durch den Feldstärkebereich bestimmt; im Gebiet der ferromagnetischen Resonanz haben kleine Kugeln den Vorrang, dagegen im Gebiet der Hysteresiskurve dünne Scheiben.

In Abb. 1 ist eine der von uns verwendeten Apparaturen zur Bestimmung der Tensorkomponenten im Blockschaltbild wiedergegeben. Der Hohlraumresonator ist ein  $H_{112}$ -Durchgangsresonator. Die Ferritprobe sitzt durch einen

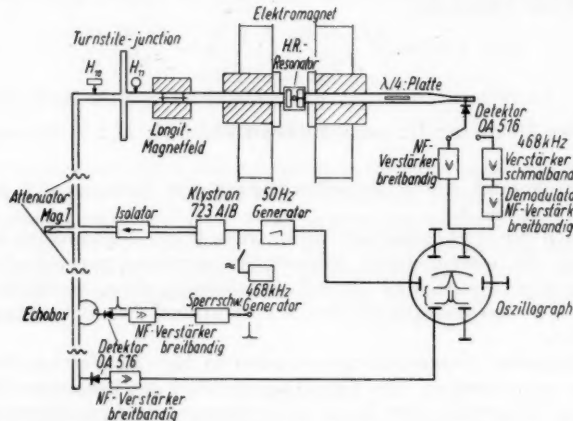


Abb. 1. Blockschaltbild der Apparatur zur Bestimmung der Tensorkomponenten

dünnen Kunststoffdraht gehalten auf der halben Länge des Metallzylinders. Die zirkularpolarisierten Wellen werden über eine Phasenschieberanordnung erzeugt, der ein longitudinal magnetisierter Ferritstift nachgeschaltet ist. Die Oberfläche des Ferritstiftes ist graphitiert. Diese Anordnung ermöglicht eine Transformation der ankommenden linearpolarisierten Welle im üblichen  $H_{10}$ -Wellenleiter in eine zirkularpolarisierte Welle im zylindrischen  $H_{11}$ -Wellenleiter. Der Ferritstift bewirkt hierbei einmal eine Abnahme der Elliptizität, zum andern eine Entkopplung des Resonators vom Sender. Als Sender dient ein Reflex-Klystron vom Typ 723 A/B, das reflektorseitig mit einer sägezahnförmigen niederfrequenten Spannung moduliert wird. Die vom Detektor gleichgerichtete Mikrowellenenergie liefert ein niederfrequentes Signal, das der Resonanzkurve des Resonators entspricht.

Die Frequenzbestimmung erfolgt mit Hilfe einer resonanzscharfen Echo-box, die simultan zu Schwingungen angeregt wird. Das von ihr ausgehende Signal wird über einen Verstärker mit anschließender Sperrschwingerschaltung in einen Nadelimpuls umgeformt. Dieser Nadelimpuls dient zur Helligkeitsmodulation der Bildschirmkurve des Oszillographen. Als Detektoren werden besonders ausgewählte Siliziumdioden (OA 516) mit gut quadratischer Kennlinie verwendet. Zur Bestimmung des Gütefaktors des Hohlraumresonators

wurde nach der Literatur<sup>4)</sup> die Halbwertsbreite der geschriebenen Resonanzkurve gemessen. Da jedoch durch die Amplitudenmodulation der auf den Testresonator fallenden Mikrowelle die Basis der Resonanzkurve nicht genau festliegt, ist die Lage der Halbwertspunkte ebenfalls nicht genau gekennzeichnet. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit wurde der Gütefaktor aus den Umkehrpunkten der Resonanzkurve nach einer Differentiationsmethode bestimmt. Zur niederfrequenten Sägezahnspannung wurde eine hochfrequente Spannung (468 kHz) kleiner Amplitude zusätzlich auf den Reflektor gegeben. In den Umkehrpunkten setzt sich die 468 kHz-Frequenzmodulation maximal in eine Amplitudenmodulation um. Dieses Signal wird über einen schmalbandigen Verstärker auf meßbare Werte gebracht, anschließend demoduliert und niederfrequenzmäßig breitbandig weiter verstärkt. Auf dem Schirm der Oszillographenröhre entsteht dann eine Kurve mit zwei scharfen Maxima, die die Lage der Umkehrpunkte kennzeichnen. Die Amplitudenmodulation der ankommenden Mikrowelle erweist sich hierbei als vernachlässigbar klein.

Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit wurde eine Methode ausgearbeitet, bei der mit Hilfe stabiler Signale, wie es das Blockschaltbild Abb. 2 veranschaulicht, die Resonanzkurve des Testresonators abgetastet werden kann. Die Frequenzmessung erfolgt über einen geeichten Empfänger, auf den die Differenzfrequenz zwischen beiden stabilisierten Signalen gegeben wird. Die beiden Klystrons werden auf zwei Hohlraumresonatoren stabilisiert, und zwar geschieht das nach einer vereinfachten Pound'schen Methode. Einer der

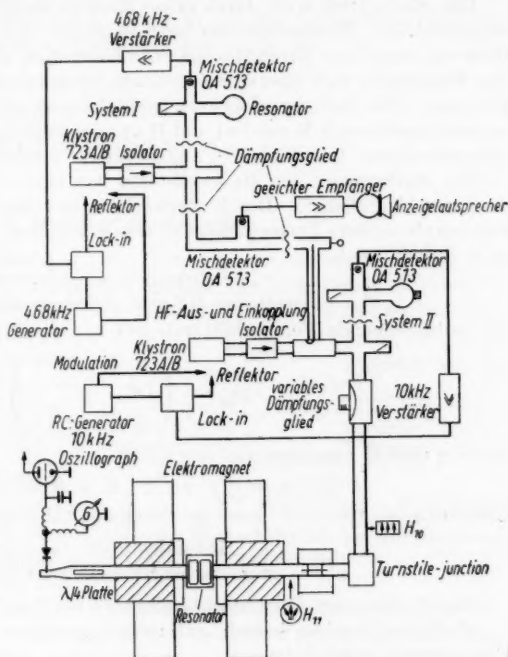


Abb. 2. Methode zur Bestimmung der Tensorkomponente mit Hilfe stabiler Signale

<sup>4)</sup> J. O. Artmann u. P. E. Tannewald, J. of Appl. Phys. **26**, 1124 (1955); E. G. Spencer, F. Reggia u. Le Craw, Convention Record of the Institute of Radio Engineers **P. 8**, 1955; J. H. Rowen u. W. v. Anlock, Physic. Rev. **96**, 1151 (1954); A. D. Berk u. B. Lax, Conv. Rec. of the Inst. of Rad. Engrs. **1953**, 10, 65; E. G. Spencer, Le Craw and F. Reggia, Proc. I. R. E. **44**, 790–800 (1956); J. Appl. Phys. **26**, 354–355 (1955); Mac Bean, Protokoll der Ferrittagung London 1956.

beiden Hohlraumresonatoren ist über einen Bereich von ungefähr 10 MHz fein abstimbar, wodurch wie oben erwähnt die Resonanzkurve des Testresonators punktweise ausgemessen werden kann. Während des Messens wird über ein variables Dämpfungsglied die Amplitude der auf den Empfangsdetektor fallenden Energie konstant gehalten. Der Gütefaktor wird aus der Lage der Umkehrpunkte abgeleitet. Der Vorteil dieser Meßmethode liegt darin, daß die Frequenzmessung genauer ist, die Basis der Resonanzkurve festliegt und keine Fehler durch Änderung der Kristalldetektorkennlinie eingehen können. Die Meßgenauigkeit beträgt ungefähr 1% auch außerhalb der Extremwerte der Meßkurven.

Das Magnetfeld wird durch einen Elektromagneten vom Weißschen Typ aufgebaut. Der Poldurchmesser beträgt 20 cm und beide Pole sind mit einer Bohrung versehen, durch die die Hohlleiter zum Resonator geführt werden. Das Magnetfeld wird über eine rotierende Spule mit anschließendem Verstärker gemessen. Die Eichung erfolgt vor jeder Messung mit einem Protonenresonanzmagnetometer nach Knoebel und Hahn, so daß eine Genauigkeit der Magnetfeldmessung auf besser als 1% angenommen werden kann<sup>5)</sup>.

Die Auswertung der Meßergebnisse hat eine störungstheoretische Rechnung zur Grundlage<sup>6)</sup>. Der Einfachheit halber wurden die Meßwerte für die sogenannte äußere Permeabilität  $\eta_a$  wiedergegeben. Die äußere Permeabilität ist definiert durch

$$\eta_a = \frac{\text{Induktion in der Ferritprobe}}{\text{magnetisches HF-Feld außerhalb der Ferritprobe}}.$$

Der entsprechende Permeabilitätstensor hat die Form:

$$(\eta_a) = \begin{pmatrix} \eta & -jK & 0 \\ jK & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $\eta$  und  $K$  komplexe Größen sind:

$$\eta = \eta' - j\eta''; \quad K = K' - jK''.$$

Üblicherweise gebraucht man als Permeabilität das Verhältnis von:

$$\mu_i = \frac{\text{Induktion in der Ferritprobe}}{\text{magnetisches HF-Feld in der Ferritprobe}}.$$

Den Aufbau des Permeabilitätstensors beschreibt Gl. (1).

Waldron<sup>7)</sup> zeigte jedoch, daß zwischen beiden Ausdrücken eine einfache Umrechnung möglich ist.

Aus den gemessenen Größen der Eigenschaften des Testresonators kann man nach folgenden Gleichungen die Tensorkomponenten bestimmen:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -S_1 [\eta' - 1 \pm K'] \quad (4)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2Q_L}\right) = S_1 [\eta'' \pm K''] \quad (5)$$

$\omega$ : Resonanzfrequenz des Hohlraums;

$\delta\omega$ : Frequenzänderung

<sup>5)</sup> H. W. Knoebel u. E. L. Hahn, The Rev. of Scient. Instr., **22**, 904 (1951).

<sup>6)</sup> Joh. Müller, Z. Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **54**, 157 (1939); M. Casimir, Phil. Research Reprots **6**, 734 (1951).

<sup>7)</sup> Waldron, Protokoll der Ferrittagung London 1956.



und

$$S_1 = 3 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)}{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 J_1^2(\eta_1 a)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\eta_0^2 a^2}\right) \quad (6)$$

 $L$ : Länge des Hohlraums; $\Delta V$ : Volumen der Ferritprobe; $V_0$ : Volumen des Hohlraums; $J_1(\eta_0 a)$ : Besselfunktion erster Ordnung; $a \eta_0 = \rho$ : Nullstelle der 1-ten Ableitung der Besselfunktion 1-ter Ordnung nach  $\rho$ . $Q_L$  ist das sogenannte belastete  $Q$ , das sich aus den Umkehrpunkten der Resonanzkurve bei quadratischer Gleichrichtung ergibt zu:

$$\frac{1}{Q_L} = \sqrt{3} \frac{\Delta f_i}{f_0} \quad (7)$$

 $\Delta f_i$ : Frequenzabstand der Umkehrpunkte; $f_0$ : Resonanzfrequenz.

### 3. Stabilisationsmethode

Das Klystron wird reflektorseitig mit einer hochfrequenten Spannung von kleiner Amplitude ( $< 1$  mV) moduliert, so daß die ausgehende Mikrowelle frequenzmoduliert ist. Läuft nun das Klystron aus der Resonanzfrequenz des resonanzscharfen und angepaßten Resonators heraus, so entsteht aus der Frequenzmodulation eine der Flankensteilheit des Resonators entsprechende Amplitudenmodulation. Wie Abb. 3 zeigt, wird diese amplitudenmodulierte Welle einem Mischdetektor zugeführt, an dessen Klemmen sich dann ein Zwischenfrequenzsignal abnehmen läßt. Da bei einer solchen multiplikativen Mischung die Phase erhalten bleibt, hat man nach der Verstärkung ein Signal zur Verfügung, das bei einer phasenempfindlichen Gleichrichtung eine Regelspannung liefern kann, deren Vorzeichen sich nach der Richtung des Herauslaufens aus der Resonanzfrequenz bestimmt. Die Abweichungen der Klystronfrequenz können mit diesem einfachen Verfahren kleiner als 1 kHz gegenüber der Resonanzfrequenz des Resonators gehalten werden.

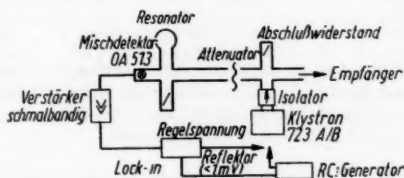


Abb. 3. Blocksaltbild der Stabilisationsmethode

### 4. Meßergebnisse und Diskussion

Die gemessenen Tensorkomponenten für ein Mg-Mn-Ferrit sind in Abb. 4 zusammengestellt. Zu beachten ist, daß die Meßwerte bei polykristallinem Material nur als Mittelwert anzusehen sind. Fertigt man aus einem größeren Stück gesintertem Material mehrere Meßproben an, so können die gemessenen Werte um 20% sich voneinander unterscheiden. Bei der Berechnung der Tensorkomponenten aus den Meßwerten nach Gl. (4) und (5) wurde berück-

sichtigt, daß nicht das geometrische Volumen des Hohlraumresonators in die Gleichungen einzusetzen ist, sondern wegen der Kopplungsöffnungen ein effektives Volumen. Dieses effektive Volumen erhält man nach Spencer u. Mitarb.<sup>4)</sup> aus der Abhängigkeit der Resonanzfrequenz des Resonators vom Durchmesser der Kopplungsöffnungen, wobei auf den Durchmesser Null extrapoliert werden muß. Die Änderung des effektiven Volumens beträgt nach un-

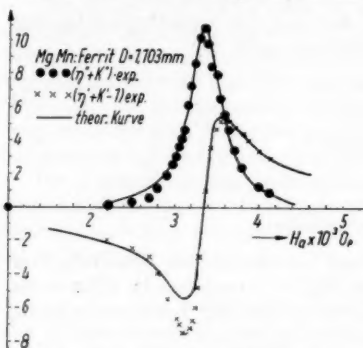


Abb. 4. Gemessene Tensorkomponenten für einen Mg-Mn-Ferrit bei  $\lambda = 3,18$  cm. Im Bereich der ferromagnetischen Resonanz wurde für  $(\eta' - \alpha' - 1)$  ein nahezu konstanter Wert von 0,2 für  $(\eta'' - \alpha'')$  ein Wert von  $\leq 0,06$  gemessen

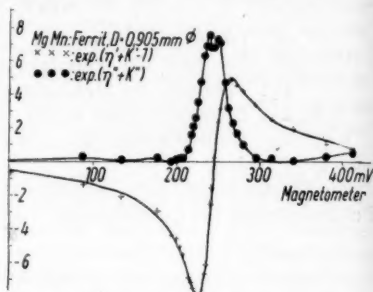


Abb. 5. Gemessene Tensorkomponenten für eine Ferritprobe, die eine deutliche Struktur der Kurve zeigt

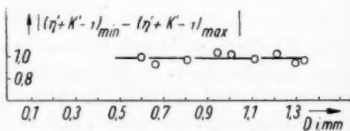


Abb. 6. Untersuchungen des Einflusses der Größe der Meßprobe auf die Asymmetrie; gemessen wurden die Extremwerte der Tensorkomponenten  $(\eta' + \alpha' - 1)$  und die Differenz von Maximal- zu Minimalwert gebildet

seren Messungen  $50/100$  vom geometrischen Volumen. Die ausgezogene Kurve wurde formal nach der Bloembergschen Theorie<sup>8)</sup> errechnet. Sie soll den charakteristisch unsymmetrischen Verlauf der Meßkurve besonders hervorheben. Artmann und Tannewald führten in ihrer Arbeit<sup>4)</sup> diese Asymmetrie auf einen Resonanzeffekt zurück, bei dem die Wellenlänge im

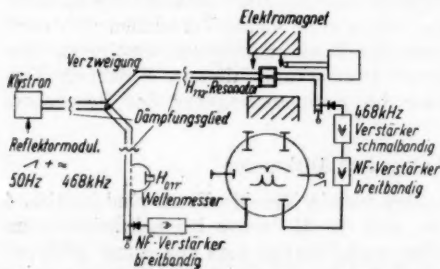


Abb. 7. Blockschaltbild der Apparatur zur Messung der ferromagnetischen Resonanzabsorption bei 1,25 cm Wellenlänge

Ferritmaterial vergleichbar ist mit den Dimensionen der Meßprobe. Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen einer sich in einem solchen Material ausbreitenden Welle liefert jedoch bei einer D. K. von 10–15 eine charakteristische Größe von  $\approx 3$  mm. Das bedeutet, daß bei Kugeln vom Durchmesser  $\approx 1$  mm ein Resonanzeffekt nicht zu erwarten

<sup>8)</sup> N. Bloembergen, Physic. Rev. 78, 572 (1950).

ist. Experimente an einer Kugel, deren Durchmesser nach jeder Messung verkleinert wurde, zeigen nach Abb. 4 eindeutig, daß die Asymmetrie auch bei kleinerem Durchmesser erhalten bleibt. Vielmehr stellten wir bei unseren Messungen an verschiedenen Meßproben fest, daß die Resonanzkurve eine gewisse Struktur aufweist. In Abb. 5 sind die Meßwerte für eine derartige Ferritprobe zusammengestellt. In der ferromagnetischen Resonanz spaltet die Kurve auf. Clogston u. Mitarb. wiesen in ihrer theoretischen Arbeit nach, daß Gitterversetzungen im Ferritkristall einen Einfluß auf das Spinwellenspektrum ausüben, wodurch sich unter anderem ein asymmetrischer Kurvenverlauf erklären läßt. Da man sich das polykristalline Material aus sehr vielen Einkristallen aufgebaut denken kann und trotz der verschiedenen Orientierungen die Asymmetrie erhalten bleibt, ist demnach dieser Kurvenverlauf auch bei polykristallinem Material verständlich. Die gemessene Aufspaltung kann auf Unregelmäßigkeiten bei der Molekülbildung während des Sinterprozesses zurückzuführen sein.

Die Meßgenauigkeit, mit der die Meßpunkte festgelegt werden können, beträgt durch Verwendung der Stabilisationsmethode und des Kernspinresonanzmagnetometers  $\approx 1\%$ .

### 5. $g$ -Faktormessungen

Zur Untersuchung der Frequenzabhängigkeit des aus der ferromagnetischen Resonanzabsorption sich ergebenden  $g$ -Faktors wurde statt des  $H_{112}$ -Resonator ein  $H_{103}$ -Resonator für Messungen bei 3,2 cm Wellenlänge verwendet. Aus Gründen der Homogenität wurden die durchbohrten Polschuhe durch neue ohne Bohrungen ersetzt.

Nach den Arbeiten von Okamura u. a.<sup>9)</sup> besitzt der  $g$ -Faktor bei verschiedenen Ferriten eine Frequenzabhängigkeit. Um eine solche Abhängigkeit festzustellen, wurde eine zweite Apparatur bei 1,25 cm Wellenlänge aufgebaut. Das Blockschaltbild hiervon ist in Abb. 7 aufgezeichnet. Der Testresonator ist ein nicht entarteter  $H_{112}$ -Resonator. Die Frequenzmessung erfolgt über einen geeichten resonanzscharfen Absorptionswellenmesser.

Die Messungen bei beiden Wellenlängen ergaben eine eindeutige Frequenzabhängigkeit des  $g$ -Faktors.

Nach Gleichung:

$$\omega = \gamma (H_z + H_i) \quad (7)$$

$H_z$ : Angelegtes Gleichfeld

$H_i$ : Inneres Zusatzfeld.

bestimmte sich ein inneres Feld  $H_i$  zu:

$$H_i = 90 \text{ Oe}$$

und ein „wahrer“  $g$ -Faktor zu:

$$g_{\text{wahr}} = 2,04 \pm 0,01.$$

Die Probengröße bei 3,2 cm Wellenlänge betrug 0,87 mm Durchmesser und wurde zu den Messungen bei 1,25 cm Wellenlänge auf 0,39 mm Durchmesser verkleinert. Für polykristallines Material kann  $g_w$  als eine gute Übereinstimmung mit dem reinen Spinwert angesehen werden.

<sup>9)</sup> T. Okamura, Sc. Rep. Inst. Tohoku Univ. A 6, 89 (1954).

### 6. Zusammenfassung

In der vorstehenden Arbeit wird der erste Teil unserer Untersuchungen über das Verhalten der Ferrite im Mikrowellengebiet berichtet. Es werden die von uns verwendeten Apparaturen zur Bestimmung der Komponenten des Permeabilitätstensors beschrieben. Die Messungen wurden an polykristallinem Material (Mg—Mn-Ferrite) im Gebiet der ferromagnetischen Resonanz vorgenommen.

Aus den Messungen der ferromagnetischen Resonanzabsorption bei 3,2 cm und 1,25 cm Wellenlänge wurde ein inneres Feld und ein wahrer  $g$ -Faktor abgeleitet.

Erwähnen möchte ich eine Anregung, die mir Herr S. Koepp bei der Entwicklung des Stabilisationsprinzips gab, und die freundschaftliche Hilfe bei den Meßarbeiten von Herrn M. Köhn. Schließlich danke ich Herrn Prof. Dr. Hachenberg, Direktor des Heinrich-Hertz-Institutes der DAdW zu Berlin, für die Ermöglichung der Arbeit und sein förderndes Interesse.

<sup>10)</sup> A. M. Clogston, H. Suhl, L. R. Walker u. P. W. Anderson, J. Phys. Chem. Solids **1**, 129—136 (1956).

Berlin-Adlershof, Heinrich-Hertz-Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 30. Dezember 1959.

# Über die allgemeine Form der Fortpflanzungsgesetze der Stoßwellen des Gravitationsfeldes

Von H. Treder

## Inhaltsübersicht

Bei der von Stellmacher angegebenen Form der Fortpflanzungsgesetze für die Störungen des Gravitationsfeldes wird eine Darstellung der Diskontinuitätsfläche vorausgesetzt, bei der der Betrag des Flächennormalvektors stationär ist. Es wird hier die allgemeine Form der Fortpflanzungsgesetze hergeleitet, die unabhängig von der speziellen Darstellung der Sprungfläche ist.

Eine Stoßwelle des Gravitationsfeldes ist eine isotrope Hyperfläche  $\Sigma$ , an der wesentliche, d. h. nicht durch Koordinatentransformationen eliminierbare, Sprünge der Ableitungen des Gravitationsfeldes  $g_{\mu\nu}$  auftreten, die mit den Einsteinschen Gleichungen  $R_{\mu\nu} = 0$  verträglich sind. Ist  $\Sigma$  durch die Gleichung  $z(x^\alpha) = 0$  gegeben, so teilt  $\Sigma$  den  $V_4$  in die beiden Halbräume  $V^+$  mit  $z > 0$  und  $V^-$  mit  $z < 0$ . Der Zusammenhang zwischen dem gestörten Potential  $g_{\mu\nu}^+$  des  $V^+$  und dem ungestörten Potential  $g_{\mu\nu}^-$  des  $V^-$  ist für genügend kleine positive  $z$  durch die Reihenentwicklung

$$g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^- + \frac{1}{n!} \gamma_{\mu\nu} z^n + \frac{1}{(n+1)!} \gamma_{\mu\nu} z^{n+1} + \dots \quad (1)$$

(mit  $n \geq 1$ ) gegeben<sup>1)</sup>. In (1) ist  $g_{\mu\nu}^-$  die analytische Fortsetzung der  $g_{\mu\nu}$  in den  $V^+$ . Die Entwicklungskoeffizienten  $\gamma_{\mu\nu}$  können ebenfalls als analytische Funktionen aufgefaßt werden. Die Werte von  $\gamma_{\mu\nu}$  auf  $\Sigma$  geben bei Stetigkeit aller niedrigeren Ableitungen die Sprünge der  $n$ -ten Normalableitungen von  $g_{\mu\nu}$  beim Durchgang durch  $\Sigma$  wieder; es gilt also für  $z \rightarrow 0$

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv \left[ \frac{\partial^n g_{\mu\nu}}{\partial z^n} \right]. \quad (2)$$

Nach Eliminierung aller koordinatenbedingten Unstetigkeiten läßt sich gemäß Stellmacher<sup>2)</sup> der Sprungtensor  $\gamma_{\mu\nu}$  mit Hilfe von zwei Vektoren

$\pi_\mu$  und  $\tilde{\pi}_\mu$  darstellen:

$$\gamma_{\mu\nu} = \tilde{\pi}_\mu \pi_\nu + \pi_\mu \tilde{\pi}_\nu, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> H. Treder, Ann. Physik (7) 2, 225 (1958).

<sup>2)</sup> K. Stellmacher, Math. Ann. 115, 741 (1938).

wo

$$\pi_n^\mu = P_n \left( e^{i\delta} \omega_\mu + e^{-i\delta} \bar{\omega}_\mu \right) \quad (3a)$$

und

$$\tilde{\pi}_n^\mu = \frac{1}{i} P_n \left( e^{i\delta} \omega_\mu - e^{-i\delta} \bar{\omega}_\mu \right) \quad (3b)$$

ist. Hierbei sind  $\omega_\mu$  und  $\bar{\omega}_\mu$  geeignet vorgegebene konjugiert komplexe Vektoren. Der Sprungtensor  $\gamma_{\mu\nu}$  hängt also nur von zwei Skalaren, Amplifikationsfaktor  $P$  und Polarisationswinkel  $\delta$ , ab.

Bei der Formulierung derjenigen Differentialgleichungen, die die Fortpflanzung der Sprünge auf  $\Sigma$  bestimmen, hat Stellmacher l. c.<sup>2)</sup> die Funktion  $z(x^\alpha)$  als so gewählt vorausgesetzt, daß mit  $z = 0$  auch die zu ihr infinitesimal benachbarten Hyperflächen der Schar  $z = \text{const}$  Nullflächen sind. Bei Stellmacher ist also der Vektor  $p_\mu \equiv z_{,\mu}$  so normiert, daß auf  $\Sigma$  außer

$$g^{\mu\nu} z_{,\mu} z_{,\nu} = p_\mu p^\mu = 0 \quad (4)$$

auch die Stationaritätsbedingung

$$(p_\mu p^\mu)_{,\nu} = 0 \quad (4a)$$

gilt, und  $p_\mu$  somit längs einer die Fläche  $\Sigma$  aufspannenden Nullgeodäten (Bicharakteristik) nicht nur selbstparallel ist, sondern vielmehr gilt

$$p_{\mu;\nu} p^\nu = p_{\mu,\nu} p^\nu + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}{}_{,\mu} p_\sigma p_\tau = 0. \quad (5)$$

— Unter Verwendung von (4a) leitete Stellmacher als Fortpflanzungsgesetze erstens den skalaren Erhaltungssatz für die Sprungerregung

$$\begin{aligned} E_n &= \gamma_n^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_n^2 = 2 \frac{P^4}{n} \\ \left( \sqrt{-g} \frac{P^e E}{n} \right)_{,e} &= 2 \left( \sqrt{-g} \frac{P^4 p^e}{n} \right)_{,e} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

und zweitens die Konstanz des Winkels  $\delta$  längs einer Bicharakteristik

$$\frac{d\delta}{d\tau} \equiv \delta_{,e} p^e = 0 \quad (7)$$

her.

Nun ist mit  $z = 0$  auch jede Gleichung

$$z \equiv \varphi z = 0 \quad (8)$$

eine Darstellung der Fläche  $\Sigma$ , wenn  $\varphi(x^\alpha)$  auf  $\Sigma$  nirgends verschwindet und stetig differenzierbar ist. Der Normalvektor der Fläche  $\Sigma$  ist bei dieser Darstellung durch

$$\bar{z}_{,\mu} \equiv \bar{p}_\mu = \{\varphi p_\mu + \varphi_{,\mu} z\}_{(z=0)} = \varphi p_\mu \quad (8a)$$

gegeben. Aus (4), (5) und (8a) folgt aber für die Ableitungen von  $\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu$  auf  $\Sigma$

$$(\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu)_{,\nu} = 2 \varphi \varphi_{,\mu} p^\mu \bar{p}_\nu = 2 \frac{d\varphi}{d\tau} \bar{p}_\nu. \quad (9)$$

(9) verschwindet nur dann, wenn  $\varphi$  längs einer Bicharakteristik konstant ist, d. h.  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  gilt<sup>3)</sup>. Im allgemeinen ist  $\bar{p}_\mu \bar{p}^\mu$  auf  $\Sigma$  hingegen nicht stationär, sondern  $(\bar{p}_\mu \bar{p}^\mu)_{,\nu}$  ist proportional zu  $\bar{p}_\nu$ .

<sup>3)</sup> Die von J. Ehlers u. R. K. Sachs [Z. Physik **155**, 498 (1959)] untersuchte Parametertransformation entspricht der Ersetzung von  $z$  durch  $\tilde{z} = \varphi z$  für den Fall, daß  $\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$  (und  $n = 2$ ) ist.



Nun kann zwar jede Darstellung von  $\Sigma$  mit nichtstationären isotropen Normalvektor  $\bar{p}_\mu$  durch eine Darstellung von der Form  $z = 0$ , d. h. durch eine solche mit stationärem Normalvektor, ersetzt werden<sup>4)</sup>. Es ist aber lehrreich und bei konkreten Anwendungen auch zweckmäßig, die Fortpflanzungsgesetze für die Sprünge so zu formulieren, daß sie unabhängig von der speziellen Darstellung der Sprungfläche  $\Sigma$  sind.

Wird  $\Sigma$  durch die Gl. (8) vorgegeben, so gilt für  $g_{\mu\nu}^+$  — an Stelle von (1) — die Entwicklung

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^+ &= g_{\mu\nu}^- + \frac{1}{n!} \bar{\gamma}_{\mu\nu} \bar{z}^n + \frac{1}{(n+1)!} \bar{\gamma}_{\mu\nu} \bar{z}^{n+1} + \dots \\ &= g_{\mu\nu}^- + \frac{1}{n!} \bar{\gamma}_{\mu\nu} \varphi^n z^n + \frac{1}{(n+1)!} \bar{\gamma}_{\mu\nu} \varphi^{n+1} z^{n+1} + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

wobei jetzt die Werte von  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  auf  $\Sigma$  den Sprungtensor

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} \equiv \left[ \frac{\partial^n g_{\mu\nu}}{\partial \bar{z}^n} \right] \quad (10a)$$

bilden. Da die Entwicklungen (1) und (10) gliedweise übereinstimmen müssen, sehen wir, daß die Ersetzung der Flächengleichung  $z = 0$  durch (8) eine Transformation der Koeffizienten  $\gamma_{\mu\nu}$  in der Entwicklung von  $g_{\mu\nu}^+$  bedeutet:

Die neuen Entwicklungskoeffizienten  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  hängen mit den alten  $\gamma_{\mu\nu}$  gemäß

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \varphi^{-(n+i)} \quad (11)$$

zusammen. Insbesondere transformiert sich also auf der Fläche  $\Sigma$  der Sprungtensor  $\gamma_{\mu\nu}$  in den Sprungtensor

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \varphi^{-n}, \quad (11a)$$

wobei für die Funktion  $\varphi$  ihre Werte aus  $\Sigma$  einzusetzen sind. Nach (3) bedeutet (11a) eine Transformation des Amplitudenfaktors gemäß

$$\bar{P} = P \varphi^{-\frac{n}{2}} \quad (12a)$$

und dementsprechend eine solche der Sprungerregung gemäß

$$\bar{E} \equiv 2 \bar{P}^4 = E \varphi^{-2n}; \quad (12b)$$

der Polarisationswinkel  $\delta$  ändert sich hingegen nicht.

Wir bilden nun auf  $\Sigma$  für die neue Sprungerregung  $\bar{E}$  den Ausdruck  $\bar{p}_\sigma \left( \sqrt{-g} \bar{E} \bar{p}^\mu \right)_\mu$ . Mit (8a), (9) und (12b) gibt dies wegen des Erhaltungssatzes (6) für  $E$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \bar{p}_\sigma \left( \sqrt{-g} \bar{E} \bar{p}^\mu \right)_\mu &= \varphi p_\sigma \sqrt{-g} E (-2n + 2) \varphi^{-2n} \varphi_{,\mu} p^\mu \\ &= -(n-1) \sqrt{-g} \bar{E} (\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu)_{,\sigma}. \end{aligned} \quad (13a)$$

<sup>4)</sup> S. z. B. A. Papapetrou u. H. Treder (vorstehende Arbeit).

Aus (13a) folgt, daß bei Verwendung einer beliebigen, nicht notwendig stationären, Darstellung der Sprungfläche  $\Sigma$  für den Sprungtensor  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  an Stelle des Stellmacherschen Erhaltungssatzes (6) die Gleichung

$$\bar{p}_\sigma \left( \sqrt{-g} \frac{\bar{E}}{n} \bar{p}^\mu \right)_{,\mu} + (n-1) \sqrt{-g} \frac{\bar{E}}{n} (\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu)_{,\sigma} = 0 \quad (13)$$

tritt. In die allgemeine, von der Darstellung der Sprungfläche  $\Sigma$  unabhängige, Form der Differentialgleichung für die Sprungerregung geht somit die Ordnung  $n$  der niedrigsten unstetigen Normalableitungen der  $g_{\mu\nu}$  explizit ein<sup>5)</sup>. — Hingegen ist die Form der Gl. (7) bereits parameterinvariant; ersetzt man in (7)  $p^e$  durch  $\bar{p}^e$ , so multipliziert sich (7) einfach mit dem Faktor  $\varphi$  und es gilt:

$$\frac{d\delta}{d\tau} \equiv \delta_{,e} \bar{p}^e = \varphi \frac{d\delta}{d\tau} = 0. \quad (14)$$

Es sei noch bemerkt, daß die von Stellmacher nachgewiesene Analogie zwischen den charakteristischen Unstetigkeiten in der Einsteinschen und in der Maxwellschen Feldtheorie natürlich weiterhin bestehen bleibt: Die niedrigsten an  $\Sigma$  unstetigen Normalableitungen des Vektorpotentials  $A_\mu$

mögen wiederum die  $n$ -ten Ableitungen sein. Ist dann  $\bar{\psi}_\mu \equiv \left[ \frac{\partial^n A_\mu}{\partial z^n} \right]$ , so gilt für die elektromagnetische Sprungerregung  $\bar{\psi}_\mu \bar{\psi}^\mu$  eine Gleichung von der Form (13):

$$\bar{p}_\sigma \left( \sqrt{-g} \frac{\bar{\psi}^\mu}{n} \frac{\bar{\psi}_\mu}{n} \bar{p}^\nu \right)_{,\nu} + (n-1) \sqrt{-g} \frac{\bar{\psi}^\mu}{n} \frac{\bar{\psi}_\mu}{n} (\bar{p}^\nu \bar{p}_\nu)_{,\sigma} = 0, \quad (15)$$

(15) folgt aus Stellmachers skalarem Erhaltungssatz  $\left( \sqrt{-g} \frac{\psi^\mu}{n} \psi_\mu p^\nu \right)_{,\nu} = 0$  der bei Erfüllung der Stationaritätsbedingung (4a) gilt, auf Grund der Bemerkung, daß der Sprungvektor  $\bar{\psi}_\mu$  mit dem Sprungvektor  $\psi_\mu \equiv \left[ \frac{\partial^n A_\mu}{\partial z^n} \right]$  gemäß

$$\bar{\psi}_\mu = \psi_\mu \varphi^{-n} \quad (16)$$

zusammenhängt. — Die zweite Fortpflanzungsbedingung Stellmachers, die die Konstanz des Polarisationswinkels längs einer Bicharakteristik ausdrückt, bleibt bei Ersetzung von  $z$  durch  $\bar{z}$  wieder unverändert.

Herrn Professor Dr. A. Papapetrou danke ich herzlich für zahlreiche Diskussionen.

<sup>5)</sup> Insbesondere gilt für die Sprünge erster Ordnung ( $n=1$ ) unabhängig von der Darstellung der Sprungfläche  $\Sigma$  der von A. Papapetrou u. H. Treder [Math. Nachrichten 20, 53 (1959)] hergeleitete Erhaltungssatz für die Sprungerregung.

Berlin, Institut für reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 29. Januar 1960.

(13)

anab-  
somit  
plizit  
; er-  
tor  $\varphi$

**Zur Frage der Existenz von singularitätsfreien Lösungen  
der allgemein-relativistischen Feldgleichungen,  
die Teilchenmodelle darstellen könnten. II**

Von A. Papapetrou und H. Treder

Mit 4 Abbildungen

(14)

logie  
und  
Die  
 $A_\mu$

**Inhaltsübersicht**

Es werden Riemannsche Raum-Zeit-Welten untersucht, in denen es asymptotische Nullhyperflächen gibt, die, ähnlich wie die Schwarzschildsche Fläche  $r = 2m$ , ganz im räumlich Endlichen verlaufen. Es wird gezeigt, daß es in diesen Räumen geodätische Strahlen mit endlichen (von Null verschiedenen) Gesamtlängen gibt und die Räume daher topologisch inkomplett sind. Ferner wird gezeigt, daß auch bei Zulassung solcher inkompletten Räume die in Teil I bewiesene Nichtexistenz von singularitätsfreien, zeitlich-periodischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen bestehen bleibt.

(15)

= 0

mer-

**§ 1.**

maß

(16)

ers,  
aus-

In dem ersten Teil dieser Arbeit<sup>1)</sup> haben wir die Existenz von zeitlich periodischen singularitätsfreien Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

ische

a der  
Nach-

ssen-

diskutiert. Es wurde gezeigt, daß es keine derartigen Lösungen gibt, wenn man die übliche Grenzbedingung  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  für  $r \rightarrow \infty$  fordert und weiter verlangt, daß der durch (1) bestimmte Einsteinsche Raum  $V_4$  in dem im Teil I erörterten Sinne ein topologisches Homolog zum Minkowski-Raum darstellt. Im Rahmen des Beweisganges wurde ein geometrisches Theorem hergeleitet, aus dem folgt, daß in jedem Riemannschen  $V_4$  von der geforderten topologischen Struktur alle glatten Nullhyperflächen ins räumlich Unendliche reichen. Dieses geometrische Theorem besagte folgendes: In einem regulären, zum Minkowski-Raum homologen Riemannschen  $V_4$  schneidet jede glatte Hyperfläche von bestimmtem (raumartigen, zeitartigen oder isotropen) Charakter jede Hyperfläche eines anderen Charakters.

Nun ist der durch die Schwarzschildsche Lösung von (1) definierte kugelsymmetrische Raum ein bis auf eine Singularität bei  $r = 0$  regulärer Spezieller Einstein-Raum. Dies sieht man am einfachsten an Hand der

<sup>1)</sup> A. Papapetrou u. H. Treder, Ann. Physik (7) **3**, 360 (1959).

analytischen Form des Schwarzschildschen Linienelements<sup>2)</sup>:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{1}{r}\right) dr^2 + \frac{2}{r} dr dt + \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2). \quad (2)$$

Aus (2) entnimmt man aber weiter, daß die Schwarzschildsche Hyperfläche

$$r = 1 \quad (3)$$

eine Nullfläche ist, und diese Nullfläche schneidet die zeitartigen Hyperflächen  $r = \text{const} > 1$  ersichtlich nicht. Ferner sind in der Schwarzschildschen Lösung die Hyperflächen  $r = \text{const} < 1$  raumartige Flächen, die ebenfalls weder die Schwarzschildsche Nullfläche  $r = 1$  noch irgendeine der zeitartigen Flächen  $r = \text{const} > 1$  schneiden.

Im folgenden werden wir die näheren Umstände, bei denen derartige Ausnahmefälle des obengenannten geometrischen Theorems auftreten, ausführlich diskutieren. Es wird sich ergeben, daß es eine unendliche Zahl von Riemannschen Räumen mit regulärer Metrik gibt, in denen Nullflächen von der Art der Schwarzschildschen Fläche (3) existieren<sup>3)</sup>. Die Eigenschaften dieser Nullflächen werden näher untersucht und es wird gezeigt, daß sie in einem im § 6 definierten Sinn „global isolierte Nullflächen“ sind. Ferner soll gezeigt werden, daß ein Raum, in dem es eine derartige isolierte Nullfläche gibt, notwendig topologisch inkomplett ist. Dann läßt sich das oben angegebene geometrische Theorem folgendermaßen präzisieren: In einem zum Minkowski-Raum homologen und insbesondere topologisch kompletten Riemannschen  $V_4$  mit singularitätsfreier Metrik schneiden sich alle glatten Hyperflächen verschiedenen Charakters.

In den §§ 7 und 8 werden wir schließlich die Bedeutung von topologisch inkompletten Einstein-Räumen für das Problem der Herleitung von singularitätsfreien Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen diskutieren. Wir werden zunächst einige Argumente vorbringen, aus denen unseres Erachtens klar hervorgeht, daß topologisch in komplette Räume vom physikalischen Standpunkt gesehen wesentlich irregulär sind und daher bei der Diskussion von singularitätsfreien Lösungen, die als Modelle von physikalischen Teilchen verwendbar sein sollen, a priori auszuschließen sind. Ferner werden wir zeigen, daß auch die Zulassung von topologisch inkompletten Räumen nichts an der im Teil I bewiesenen Nichtexistenz singularitätsfreier zeitlich periodischer Lösungen von (1) ändert.

<sup>2)</sup> D. Finkelstein, *Physical Rev.* **110**, 965 (1958); P. Jordan, *Researches in General Relativity* (preprint). In (2) wurde die Konstante der Schwarzschildschen Lösung  $2m = 1$  gesetzt.

<sup>3)</sup> Bei dieser Diskussion beschränken wir uns nicht auf Einstein-Räume, weil sich das obige geometrische Theorem ebenfalls nicht auf Einstein-Räume beschränkt. Aus diesem Grunde ist im Fall des Schwarzschildschen Raums die Existenz der Singularität bei  $r \rightarrow 0$  belanglos. Man kann sie ja ohne weiteres dadurch eliminieren, daß in einem Bereich  $0 \leq r < a$  mit festgelegten  $a < 1$  die in den ersten 3 Termen der Metrik (2) auftretende Funktion  $\frac{1}{r}$  durch eine für  $r \rightarrow 0$  reguläre und für  $r = a$  an die Funktion  $\frac{1}{r}$  genügend oft (z. B. zweimal) stetig differenzierbar anschließende Funktion von  $r$  ersetzt wird. Dies hat lediglich zur Folge, daß die Feldgleichungen (1) im Bereich  $0 \leq r < a$  nicht mehr erfüllt sind.

## § 2.

Um zu sehen, wie die topologische Struktur des  $V_4$  in unser geometrisches Theorem über das Schneiden von Hyperflächen eingeht, fassen wir zunächst die Beweismethode, mit deren Hilfe das Theorem hergeleitet wurde, kurz zusammen. Es wurde in einem Riemannschen Raum  $V_4$  mit regulärer Metrik eine glatte Hyperfläche  $\Sigma$  betrachtet, die den  $V_4$  in die beiden Halbräume  $V^+$  und  $V^-$  teilt. In dem  $V^+$  wurde eine glatte zeitartige Hyperfläche  $S_0$  vorgegeben, welche keinen gemeinsamen Punkt mit  $\Sigma$  haben soll. Es wurde weiter dann vorausgesetzt, daß es mit Hilfe einer sukzessiven Anwendung der Gaußschen Konstruktion<sup>4)</sup> — bei Eliminierung eventuell entstehender Kaustiken — möglich ist, durch eine geodätische Parallelverschiebung der Fläche  $S_0$  zu einer ebenfalls glatten zeitartigen Hyperfläche  $S_1$  zu gelangen, die ganz oder teilweise im  $V^-$  verläuft. Dies führt dann im Fall, daß  $\Sigma$  eine Nullfläche ist, zu einem Widerspruch; hieraus folgte, daß jede Nullfläche jede zeitartige Fläche  $S_0$  schneiden muß.

Der Ausnahmefall, mit dem wir uns hier befassen werden, ist nun der, daß das von der im  $V^+$  liegenden zeitartigen Hyperfläche  $S_0$  ausgehende Gaußsche Verfahren zwar beliebig nahe an  $\Sigma$  herankommt, aber nicht in den  $V^-$  eindringt. Dies ist ersichtlich dann der Fall, wenn die zur Ausgangsfläche  $S_0$  normalen (raumartigen) Geodäten die Fläche  $\Sigma$  nicht durchstoßen, sondern sich ihr asymptotisch nähern<sup>5)</sup>.

Wir zeigen nun zunächst, daß jede asymptotische Hyperfläche  $\Sigma$ , die diese Eigenschaft hat, notwendig eine Nullfläche ist. Hierzu schreiben wir der im Halbraum gelegenen zeitartigen Hyperfläche  $S_0$  die Gleichung

$$x^1 = \text{const} = a \quad (4)$$

zu. Das Koordinatensystem legen wir dann weiterhin in der Weise fest, daß die durch die Gaußsche Konstruktion aus der Parallelverschiebung von  $S_0$  hervorgehenden Hyperflächen  $S$  ebenfalls durch Gleichungen von der Form

$$x^1 = \text{const} \quad (5)$$

gegeben werden. Die Hyperfläche  $\Sigma$  gehört als asymptotische Fläche der Schar (5) an. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die Fläche  $\Sigma$  mit  $x^1 = 1$  und die Anfangsfläche  $S_0$  mit  $x^1 = a > 1$  darstellen.

Der kovariante Normalvektor einer der Hyperflächen (5) ist durch

$$p_\nu = x^1_{,\nu} = \delta^1_\nu \quad (6a)$$

und der kontravariante durch

$$p^\mu = g^{\mu\nu} \delta^1_\nu = g^{\mu 1} \quad (6b)$$

gegeben. Gemäß der Forderung, daß  $S_0$  zeitartig ist, muß der Vektor  $p_\mu$  raumartig sein, d. h. es muß

$$g^{11} < 0 \text{ für } x^1 > 1 \quad (6c)$$

<sup>4)</sup> Vgl. etwa L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton 1949, S. 57–59.

<sup>5)</sup> Genau dieser Fall liegt bei der Nullfläche (3) des Schwarzschildschen Feldes vor. In dem der Metrik (2) zugrunde liegenden Koordinatensystem haben nämlich die zu den zeitartigen Hyperflächen  $r = \text{const} > 1$  normalen Geodäten die Gleichung

$$x^0 + \ln(r-1) = \text{const} \text{ (mit } r > 1)$$

und erreichen daher die Schwarzschildsche Nullfläche  $r = 1$  asymptotisch bei  $x^0 \rightarrow \infty$ .

gelten. Der normierte Normalvektor von (5) hat die Komponenten

$$w_\mu = p_\mu (g^{11})^{-\frac{1}{2}}. \quad (6d)$$

Die Kurven mit dem Tangentialvektor (6d) sind nun voraussetzungsgemäß Geodäten, d. h. es muß gelten

$$\frac{d}{ds} w_\mu + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}{}_{,\mu} w_\sigma w_\tau = 0. \quad (7)$$

Aus (7) ergeben sich für  $\mu = 1, 2, 3$  drei Bedingungen, welche für die Existenz der asymptotischen Nullfläche  $\Sigma$  notwendig sind. Diese lauten<sup>6)</sup>:

$$g^{11}{}_{,2} = g^{11}{}_{,3} = g^{11}{}_{,0} = 0.$$

Ferner sind die vier Gleichungen (7) wegen der Existenz des Normierungsintegrals  $g^{\mu\nu} w_\mu w_\nu = 1$  nicht unabhängig voneinander. Man kann also die vierte Gleichung (7) durch die aus (6d) folgende Beziehung

$$w^1 = g^{1\alpha} w_\alpha = \frac{dx^1}{ds} = \sqrt{g^{11}} \quad (9)$$

ersetzen.

Man entnimmt aus (6b), daß die Richtung des Tangentialvektors einer der zu den Flächen  $x^1 = \text{const}$  orthogonalen Geodäten durch

$$\frac{dx^1}{g^{11}} = \frac{dx^2}{g^{12}} = \frac{dx^3}{g^{13}} = \frac{dx^0}{g^{10}} \quad (10)$$

bestimmt ist. Damit diese Geodäten die Fläche  $\Sigma$  asymptotisch erreichen, muß also  $g^{11}$  auf  $\Sigma$  verschwinden:

$$g^{11} = 0 \quad \text{für} \quad x = 1, \quad (11)$$

während mindestens eine der Komponenten  $g^{12}, g^{13}, g^{10}$  von Null verschieden ist<sup>7)</sup>. Letzteres ist deshalb notwendig, weil für  $g^{1\mu} = 0$  die Determinante von  $g^{\mu\nu}$  verschwinden würde, was mit der Regularität der Metrik unvereinbar ist. Aus (6a) und (11) folgt, daß die Hyperfläche  $\Sigma$  eine Nullfläche ist. Dementsprechend sind die zu  $\Sigma$  orthogonalen Geodäten nicht mehr die raumartigen orthogonalen Trajektorien der Flächenschar (5), sondern die in der Fläche  $\Sigma$  selbst verlaufenden Nullgeodäten.

Wir betrachten nun einen Punkt  $P$  der Anfangsfläche  $S_0$  und denjenigen Ast der von  $P$  ausgehenden zu  $S_0$  normalen Geodäten, der die Nullfläche  $\Sigma$  im Unendlichen asymptotisch erreicht. Für die Gesamtlänge dieses Astes (geodätischen Strahls) ergibt sich aus (9):

$$s = \int_1^a \frac{dx^1}{\sqrt{g^{11}}}. \quad (12)$$

<sup>6)</sup> Das Koordinatensystem ist durch (8) nicht eindeutig festgelegt. Insbesondere kann immer noch  $g^{12} = g^{13} = 0$  gemacht werden; dann verläuft jede der zu  $x^1 = \text{const}$  orthogonalen Geodäten in einer  $x^1 x^0$ -Ebene.

<sup>7)</sup> Man kann leicht sehen, daß die Normalgeodäten der Fläche  $S_0$  die Fläche  $\Sigma$  nicht in einem im Endlichen gelegenen Punkt  $P$  tangieren können. Wäre dies nämlich der Fall, so würden wieder die Formeln (10) und (11) gelten. Danach wäre aber der Tangentialvektor der Normalgeodäte am Punkt  $P$  ein Nullvektor, was im Widerspruch dazu steht, daß die Normalgeodäte raumartig ist.



Wenn die Gleichung  $g^{11} = 0$  für  $x^1$  eine einfache Wurzel hat, hat das Integral (12) einen endlichen Wert<sup>8)</sup>. Dies bedeutet, daß es in dem betreffenden  $V_4$  geodätische Strahlen mit endlicher (von Null verschiedener) Länge gibt. D. h. es gibt Geodäten, die keine Nullgeodäten sind und auf denen ihr normalisierter Arcus nach einer Richtung hin nur endlich oft abgetragen werden kann. Ein derartiger  $V_4$  ist topologisch inkomplett<sup>9)</sup>.

Hat die Gleichung  $g^{11} = 0$  für  $x^1 = 1$  hingegen eine mehrfache Wurzel, dann divergiert das Integral (12), so daß für die Entscheidung der Frage, ob der betreffende Raum topologisch komplett oder inkomplett ist, nähere Betrachtungen erforderlich werden. Diese Untersuchung soll in den folgenden §§ 3 und 4 geschehen.

### § 3.

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen kugelsymmetrischen Riemannschen  $V_4$ . Seine Metrik ist bei Verwendung von sphärischen Polarkoordinaten von der Form

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + 2 g_{10} dx^1 dx^0 + g_{00} (dx^0)^2 + g_{22} [(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2], \quad (13)$$

wobei  $g_{11}$ ,  $g_{10}$ ,  $g_{00}$  und  $g_{22}$  Funktionen nur von  $x^1 = r$  und  $x^0 = t$  sind. In diesem Raum setzen wir die Existenz einer ebenfalls kugelsymmetrischen Nullfläche  $\Sigma$  voraus, zu der die orthogonalen geodätischen Trajektorien einer Schar von kugelsymmetrischen zeitartigen Hyperflächen  $S$  des  $V^+$  asymptotisch verlaufen. Die Gleichung der Nullhyperfläche  $\Sigma$  dürfen wir ohne weiteres in der Form

$$x^1 = 1 \quad (14)$$

schreiben und die Gleichungen der Flächen  $S$  in der Form  $x^1 = \text{const} > 1$ . Nach (8) wird dann  $g^{11}$  nur von  $x^1$  abhängen. Ferner gilt nach (11) und (6c)

$$g^{11} = 0 \quad \text{für} \quad x^1 = 1, \quad (15a)$$

$$g^{11} < 0 \quad \text{für} \quad x^1 > 1. \quad (15b)$$

Gemäß der Minkowskischen Signatur der  $g_{\mu\nu}$  ist  $g_{11} g_{00} - g_{10}^2 < 0$  und daher folgt aus (15b):

$$g_{00} = g^{11} (g_{11} g_{00} - g_{10}^2) > 0 \quad \text{für} \quad x^1 > 1, \quad (15c)$$

d. h. die Koordinatenlinien von  $x^0$  sind zeitartige Kurven. Wegen der Regularität der Metrik ist auf der ganzen Fläche  $\Sigma$  notwendig  $g^{10} \neq 0$ . Aus Kontinuitätsgründen wird somit  $g^{10}$  in einem gewissen Bereich in der Nähe der Fläche  $\Sigma$  dasselbe Vorzeichen haben. Wir dürfen dabei ohne weiteres  $g^{10} > 0$  voraussetzen.

Wegen der Kugelsymmetrie verlaufen die zur Flächenschar  $x^1 = \text{const}$  orthogonalen geodätischen Trajektorien jeweils in einer  $x^1 x^0$ -Ebene. Wir betrachten nun diejenigen geodätischen Strahlen, die von einem  $P$  der Fläche  $x^1 = a > 1$  ausgehen und in der durch diesen Punkt  $P$  bestimmten  $x^1 x^0$ -

<sup>8)</sup> Dies gilt bekanntlich für die zur Schwarzschildschen Fläche (3) asymptotisch verlaufenden Normalgeodäten  $x^0 + \ln(r-1) = \text{const.}$

<sup>9)</sup> H. Hopf u. W. Rinow, Commentari Mathematici Helvetici 3, 209 (1931).

Ebene verlaufen. Hierzu gehört zunächst die durch  $P$  gehende zur Hyperfläche  $x^1 = a$  orthogonale Geodäte  $G_1$  der Abb. 1. Ferner gibt es auf dieser Ebene zwei durch  $P$  gehende Nullgeodäten  $G_0$  und  $G'_0$ . Weil die Koordinaten-

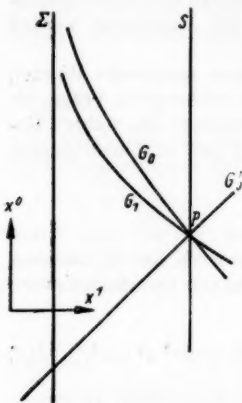


Abb. 1

linien von  $x^0$  im  $V^+$  zeitartig, dagegen auf  $\Sigma$  Nullgeodäten sind, kann nur eine dieser beiden Nullgeodäten die Fläche  $\Sigma$  durchstoßen, während die andere asymptotisch zu ihr verläuft (s. Abb. 1). Dann kann man aber leicht sehen, daß auch alle in der  $x^1 x^0$ -Ebene liegenden, durch  $P$  gehenden raumartigen Geodäten, deren Tangentenrichtung an  $P$  in dem durch die Tangentenrichtungen von  $G_1$  und  $G_0$  bestimmten Winkel liegen, die Fläche  $\Sigma$  ebenfalls asymptotisch erreichen. Dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß eine beliebige Geodäte  $G$  aus dieser Geodätenschar weder  $G_1$  noch  $G_0$  an einem zweiten Punkt  $P'$  schneiden kann.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit des ersten Teils dieser Bemerkung, wenn man die Gesamtheit der von den verschiedenen Punkten von  $S$  in der durch  $P$  festgelegten  $x^1 x^0$ -Ebene ausgehenden geodätischen Strahlen  $G_1$  betrachtet (s. Abb. 2): Hätten die durch  $P$  gehenden Geo-

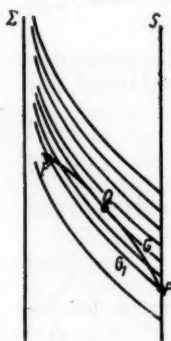


Abb. 2

däten  $G$  und  $G_1$  einen zweiten gemeinsamen Punkt  $P'$ , so müßte  $G$  an einem gewissen Punkt  $Q$  eine andere  $G_1$ -Geodäte tangieren, was ersichtlich einen Widerspruch darstellt. Analog folgt auch der zweite Teil unserer Bemerkung aus der Betrachtung der Gesamtheit der in der  $x^1 x^0$ -Ebene verlaufenden Nullgeodäten  $G_0$ .

Es gibt somit durch jeden Punkt  $P$  einer Fläche  $S$  ein Bündel von raumartigen, in der  $x^1 x^0$ -Ebene liegenden Geodäten, die überall zwischen der zu  $S$  orthogonalen Geodäte  $G_1$  und der asymptotischen Nullgeodäte  $G_0$  verlaufen und somit die Fläche  $\Sigma$  asymptotisch erreichen. Die Anschauung zeigt bereits, daß die Gesamtlängen der zwischen  $P$  und der Fläche  $\Sigma$  verlaufenden Äste der Geodäten dieses Bündels kontinuierlich zwischen der (endlichen oder unendlichen) Gesamtlänge des Astes von  $G_1$  und der Länge Null der asymptotischen Nullgeodäte  $G_0$  variieren. Für den Fall, daß das Integral (12) divergiert, gibt es in dem asymptotischen Bündel somit raumartige geodätische Strahlen mit jeder beliebigen absoluten Bogenlänge zwischen 0 und  $\infty$ .

Den rechnerischen Beweis hierfür führen wir der Einfachheit halber nur für die zeitunabhängige kugelsymmetrische Metrik durch, bemerken jedoch, daß die Verallgemeinerung für eine zeitabhängige kugelsymmetrische Metrik ohne große Mühe möglich ist.

Im zeitunabhängigen Fall läßt sich die kugelsymmetrische Metrik (13) ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf folgende Form reduzieren:

$$ds^2 = -(1 + \alpha) (dx^1)^2 + 2\alpha dx^1 dx^0 + (1 - \alpha) (dx^0)^2 + g_{22} [(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2], \quad (16)$$

wo  $\alpha = \alpha(x^1)$  und  $g_{22} = g_{22}(x^1)$  ist. Dabei gilt noch gemäß (15a) und (15c):

$$\alpha = 1 \text{ für } x^1 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha < 1 \text{ für } x^1 > 1. \quad (17)$$

Die Differentialgleichungen für die geodätischen Linien besitzen jetzt drei erste Integrale. Das erste lautet

$$g_{00} \frac{dx^0}{ds} + g_{10} \frac{dx^1}{ds} = (1 - \alpha) \frac{dx^0}{ds} + \alpha \frac{dx^1}{ds} = k; \quad (18a)$$

die zwei anderen kann man in der Form

$$g_{22} \frac{dx^2}{ds} = D, \quad x^3 = \text{const} \quad (18b)$$

schreiben. Außerdem steht noch das Normierungsintegral

$$-(1 + \alpha) \left( \frac{dx^1}{ds} \right)^2 + 2\alpha \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^0}{ds} + (1 - \alpha) \left( \frac{dx^0}{ds} \right)^2 + g_{22} \left( \frac{dx^2}{ds} \right)^2 = 1 \quad (19)$$

zur Verfügung. Die Integrationskonstanten  $k$  und  $D$  in (18a, b) sind imaginär für raumartige und reell für zeitartige Geodäten.

Wir betrachten nun raumartige Geodäten in der  $x^1 x^0$ -Ebene und setzen daher  $k = i\lambda$  (mit reellem  $\lambda$ ) und  $D = 0$ . Dann folgt aus (18a) und (19)

$$\frac{dx^0}{dx^1} = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \alpha + \lambda^2}} - \alpha \right) \quad (20)$$

und

$$i ds = \frac{dx^1}{\sqrt{1 - \alpha + \lambda^2}}. \quad (21)$$

Man entnimmt aus (20), daß der Anstieg dieser Geodäten für  $x^1 \rightarrow 1$  genau dann unendlich groß wird, wenn  $\lambda \leq 0$  ist, während er für  $\lambda > 0$  dem endlichen Grenzwert

$$\frac{dx^0}{dx^1} = 1 - \frac{1}{2\lambda^2}$$

zustrebt. Dem Wert  $\lambda = 0$  entspricht die zu der Fläche  $S$  normale raumartige Geodäte  $G_1$ , wie sich aus dem Vergleich von (18a) mit  $k = 0$  und (10) ergibt. Danach werden durch die Werte  $\lambda < 0$  gerade die Geodäten des zwischen  $G_1$  und  $G_0$  verlaufenden raumartigen Bündels bestimmt (vgl. Abb. 1). Ferner entnimmt man aber aus (21), daß die Gesamtlängen der zwischen  $S$  und  $\Sigma$  verlaufenden Äste dieser Geodäten endlich sind — unabhängig davon, wie stark  $g^{11}$  für  $x^1 = 1$  verschwindet. Für  $\lambda \rightarrow 0$  strebt diese Länge dem der Geodäte  $G_1$  entsprechenden Wert zu, für  $\lambda \rightarrow \infty$  dem der Nullgeodäte  $G_0$  entsprechenden Wert Null.

Es sei noch bemerkt, daß es auch zeitartige geodätische Strahlen durch  $P$  gibt, welche in der  $x^1 x^0$ -Ebene verlaufen und einen Ast mit endlicher Gesamtlänge besitzen. Man sieht nämlich unmittelbar an Hand von (18a), daß für alle in der  $x^1 x^0$ -Ebene verlaufenden zeitartigen Geodäten durch  $P$  notwendig  $k \neq 0$  gilt; für diejenigen von ihnen, die die Fläche  $\Sigma$  asymptotisch erreichen, wird demnach nach (21) die Strahlänge endlich bleiben.

Außer den in der  $x^1x^0$ -Ebene liegenden zu  $\Sigma$  asymptotischen Geodäten geht auch eine Vielzahl von raum- und zeitartigen Geodäten durch  $P$ , für die  $D$  nicht verschwindet, die jedoch ebenfalls asymptotisch zur Fläche  $\Sigma$  verlaufen. Auch diese Geodäten besitzen im allgemeinen einen Ast mit endlicher Bogenlänge. Ferner gibt es auch zu  $\Sigma$  asymptotisch verlaufende Geodäten durch  $P$ , bei denen die  $x^3$ -Koordinate variabel ist. Insgesamt gibt es also ein dreiparametriges Bündel von durch  $P$  gehenden Geodäten, die sich der Fläche  $\Sigma$  asymptotisch nähern und im allgemeinen eine endliche Bogenlänge haben. Für die nähere Bestimmung dieses Bündels wird aber offenbar eine genauere Kenntnis der Metrik benötigt<sup>10)</sup>.

#### § 4.

Wir betrachten nun einen allgemeinen (nicht kugelsymmetrischen)  $V_4$  mit asymptotischer Nullfläche  $\Sigma$ , bei dem  $g_{11}$  für  $x^1 = 1$  stärker als von erster Ordnung verschwindet, so daß das Integral (12) divergiert.

Da jetzt keine ersten Integrale der Differentialgleichung der geodätischen Linie existieren, ist der Nachweis der Existenz von geodätischen Strahlen endlicher Länge hier nicht mehr so einfach zu führen wie für den kugelsymmetrischen  $V_4$ . Es soll im folgenden nur gezeigt werden, daß durch jeden Punkt  $P$  eines Bereiches  $1 < x^1 \leq b$ , in dem die Schar der Flächen  $S$  existiert, außer der zu  $\Sigma$  asymptotisch verlaufenden raumartigen Geodäte, die orthogonal zu der Schar der zeitartigen Fläche  $S$  ist, auch immer eine Nullgeodäte geht, die ebenfalls asymptotisch zu  $\Sigma$  verläuft. Dies führt uns dann zu der Vermutung, daß auch im allgemeinen Fall durch jeden Punkt  $P$  des betrachteten Bereiches von  $V^+$  ein ganzes Bündel von zu  $\Sigma$  asymptotisch verlaufenden raumartigen (und zeitartigen) Geodäten geht derart, daß die absoluten Bogenlängen der entsprechenden geodätischen Strahlen kontinuierlich zwischen 0 und  $\infty$  variieren — wie dies im kugelsymmetrischen Raum bei divergierendem Integral (12) der Fall war. Ein strenger Beweis für die Existenz dieses Geodätenbündels fehlt aber noch.

Zum Beweis der Existenz einer durch  $P$  gehenden, zur Nullfläche  $\Sigma$  asymptotisch verlaufenden Nullgeodäte bemerken wir zunächst, daß das Koordinatensystem immer so gewählt werden kann, daß

$$g^{12} = g^{13} = 0 \quad (22)$$

gilt. Dann verlaufen nach (10) die zu den Flächen  $S$  normalen raumartigen Geodäten jeweils in der  $x^1x^0$ -Ebene und sind — wenn wir die Richtung der  $x^0$ -Koordinate so wählen, daß  $g^{10} > 0$  wird — wie in Abb. 1 orientiert. Ferner ergibt sich aus (22) und der Forderung  $\det g_{\mu\nu} < 0$ , daß zunächst auf der Fläche  $\Sigma$  und dann wegen der Kontinuität auch in einem Bereich des  $V_4$  in der Nähe der Fläche  $\Sigma$

$$g^{22}g^{33} - (g^{23})^2 > 0$$

wird. Andererseits gilt wegen (22)

$$g_{00} = g^{11}(g^{22}g^{33} - (g^{23})^2) \det g_{\mu\nu};$$

<sup>10)</sup> Für den Schwarzschildschen  $V_4$  sind zeitartige Geodäten endlicher Länge mit nicht verschwindendem Dreh-Impuls-Integral von C. Darwin, Proc. Roy. Soc. London 249, (A), 180 (1958), ausführlich diskutiert worden.

daher ist

$$g_{00} = 0 \text{ für } x^1 = 1, \quad g_{00} > 0 \text{ für } x^1 > 1. \quad (23)$$

Aus (23) folgt, daß die durch einen beliebigen Punkt  $P$  des betrachteten Bereichs gehende Koordinatenlinie von  $x^0$  zeitartig ist, d. h. innerhalb des Nullkegels des Punktes  $P$  liegt. Dagegen ist die durch einen auf der Nullfläche  $\Sigma$  liegenden Punkt  $P^*$  gehende Koordinatenlinie von  $x^0$  die zu  $\Sigma$  normale Nullgeodäte und liegt daher auf dem Nullkegel von  $P^*$ .

Betrachten wir nun einen Punkt  $P'$ , der auf dem Vorkegel des Punktes  $P$  liegt. Da die Metrik des  $V_4$  an jedem Punkt die Minkowskische Signatur hat, muß der Vorkegel des Punktes  $P'$  innerhalb des Vorkegels von  $P$  verlaufen. Dasselbe gilt auch für die Vorkegel von Punkten  $P^*$  der Nullfläche  $\Sigma$ . Hieraus folgt zunächst, daß an allen Punkten von  $\Sigma$  der Lichtkegel ähnlich orientiert sein muß. Weiter ergibt sich, wenn man noch den in Abb. 1 gezeigten Verlauf der durch  $P$  gehenden raumartigen Geodäte  $G_1$  sowie den zeitartigen Charakter der Koordinatenlinie von  $x^0$  berücksichtigt, daß nur der Nachkegel von  $P$  die Fläche  $\Sigma$  durchstößt.

Da nun ferner die auf einer Fläche der Schar  $S$  basierende Gaußsche Konstruktion voraussetzungsgemäß einen gewissen Bereich  $1 < x^1 \leq b$  des  $V^+$  überdeckt, muß gemäß dem geometrischen Theorem des Teils I der Vorkegel eines Punktes  $P$  dieses Bereiches alle im Bereich liegenden zeitartigen Flächen  $x^1 = \text{const} > 1$  schneiden und somit der Nullfläche  $x^1 = 1$  beliebig nahe kommen. Hieraus folgt, daß der Vorkegel von  $P$  asymptotisch zur Nullfläche  $x^1 = 1$  verläuft.

Nun wird der Lichtkegel des Punktes  $P$  von den durch  $P$  gehenden Nullgeodäten aufgespannt. Aus dem asymptotischen Verlauf des Vorkegels von  $P$  ergibt sich daher: Es gibt mindestens eine durch  $P$  gehende Nullgeodäte, die asymptotisch zur Nullfläche  $x^1 = 1$  verläuft. Diese Nullgeodäte wird aber im allgemeinen nicht mehr wie die zu den Flächen  $S$  normale Geodäte in der  $x^1 x^0$ -Ebene liegen. Dadurch wird die Vervollständigung des Beweises der an sich sehr plausiblen Behauptung, daß auch im allgemeinen Fall durch  $P$  ein ganzes Bündel von asymptotischen Geodäten endlicher Strahllänge geht, erschwert.

## § 5.

Existiert im  $V_4$  eine Fläche  $\Sigma$  von der im § 2 beschriebenen Art, so wird diese auch von den zu einer im  $V^-$  liegenden Schar von Hyperflächen  $S'$  orthogonalen Geodäten asymptotisch erreicht. Dabei sind die Verhältnisse im  $V^-$  zu denjenigen Verhältnissen analog, die in den vorherigen Abschnitten für den  $V^+$  ausführlich diskutiert worden sind. Es treten nur einige qualitative Unterschiede auf, die damit zusammenhängen, ob  $g^{11}$  für  $x^1 = 1$  eine gerade oder eine ungerade Nullstelle hat. Dies soll in diesem Abschnitt kurz dargestellt werden, wobei wir uns wieder auf kugelsymmetrische Räume beschränken.

Zunächst betrachten wir den Fall einer geraden Nullstelle von  $g^{11}$ . Dann ist auch im  $V^-$   $g^{11} < 0$ , so daß im ganzen  $V_4$  — ausgenommen die Nullfläche  $\Sigma$  — sowohl die Koordinatenlinien von  $x^0$  als auch die Hyperflächen  $x^1 = \text{const}$  zeitartig sind. Die zu diesen Flächen orthogonalen Geodäten sind also auch im

$V^-$  raumartig. Für ihre Richtung gilt nach (10)

$$\frac{dx^0}{dx^1} = \frac{g^{10}}{g^{11}}.$$

Es ist also auch im  $V^-$

$$\frac{dx^0}{dx^1} < 0.$$

Die betrachteten Geodäten erreichen daher die Fläche  $S_0$  bei  $x^0 = -\infty$ . Dasselbe gilt auch für die zur Fläche  $\Sigma$  asymptotisch verlaufenden Nullgeodäten. Diese Verhältnisse sind in der Abb. 3, in der auch ein Lichtkegel zu je einem im  $V^+$ ,  $V^-$  und auf  $\Sigma$  gelegenen Punkt eingezeichnet ist, schematisch dargestellt.

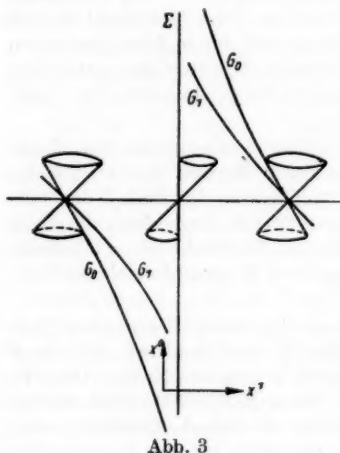


Abb. 3

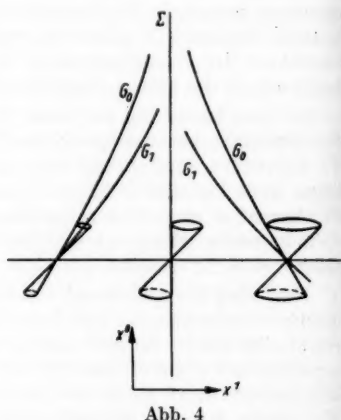


Abb. 4

Hat  $g^{11}$  für  $x^1 = 1$  hingegen eine ungerade Nullstelle, so sind die Flächen  $x^1 = \text{const}$  und demnach auch die Koordinatenlinien von  $x^0$  im Halbraum  $V^-$  raumartig. Die die Fläche  $x^1 = \text{const} < 1$  orthogonal durchstoßenden Geodäten sind also zeitartig. Für ihre Richtung gilt jetzt wegen der Änderung des Vorzeichens von  $g_{11}$

$$\frac{dx^0}{dx^1} > 0.$$

Die Geodäten erreichen also die Fläche  $\Sigma$  bei  $x^0 = +\infty$ . Dasselbe gilt natürlich auch für die asymptotisch verlaufenden Nullgeodäten. Diese Verhältnisse sind in Abb. 4 schematisch dargestellt<sup>11)</sup>.

Auch in einem nicht kugelsymmetrischen  $V_4$  spiegelt sich die Ordnung des Verschwindens von  $g^{11}$  auf der Nullhyperfläche  $\Sigma$  in den Eigenschaften der Lichtkegel an den Punkten beiderseits der Fläche  $\Sigma$  wider, jedoch sind die Verhältnisse hier weniger leicht zu übersehen.

<sup>11)</sup> Ein Beispiel für eine kugelsymmetrische Metrik mit ungerader Nullstelle von  $g^{11}$  ist wieder die Schwarzschildsche Lösung (2).



## § 6.

Wir wollen in diesem Abschnitt eine globale Eigenschaft der in den vorhergehenden Paragraphen untersuchten asymptotischen Nullhyperflächen  $\Sigma$  beweisen, die für die folgende Diskussion der Bedeutung von  $\Sigma$ -Flächen für das Problem der singularitätsfreien Gravitationsfelder nützlich ist.

Im Minkowski-Raum gibt es zu jeder glatten Hyperfläche bestimmten (zeitartigen, raumartigen oder isotropen) Charakters Hyperflächen desselben Charakters, die der ersten Hyperfläche global benachbart sind. Dies soll bedeuten, es gibt Hyperflächen von demselben Charakter wie die vorgegebene Hyperfläche derart, daß in jedem regulären Koordinatensystem jeder Punkt der neuen Hyperfläche einen infinitesimalen Koordinatenabstand  $dx^\nu$  zu Punkten der vorgegebenen Hyperfläche hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß in einem Koordinatensystem mit konstantem  $g_{\mu\nu}$  die Translation einer Hyperfläche ihren Charakter nicht verändert.

Auch in einem regulären Riemannschen  $V_4$  gilt derselbe Satz für zeit- und raumartige Hyperflächen. Wählt man nämlich das Koordinatensystem so, daß die betrachtete z. B. zeitartige Hyperfläche die Gleichung  $x^1 = \text{const} \equiv a$  bekommt, so ist für  $x^1 = a$   $g^{11} < 0$ . Dann wird aber aus Kontinuitätsgründen in einem Bereich  $|x^1 - a| < \varepsilon$  (mit genügend kleinem  $\varepsilon$ ) weiterhin  $g^{11} < 0$  sein, woraus folgt, daß die Hyperflächen  $x^1 = a \pm \varepsilon_1$  mit  $\varepsilon_1 < \varepsilon$  ebenfalls zeitartig sind. — Dagegen gilt für Nullflächen im allgemeinen kein analoger Satz. Wir werden nämlich im folgenden sehen, daß eine asymptotische Nullhyperfläche  $\Sigma$ , wie sie in den vorhergehenden Paragraphen untersucht worden ist, keine global benachbarten Nullflächen besitzt.

Die Nullfläche  $\Sigma$  sei wiederum durch die Gleichung  $x^1 = 1$  gegeben, und die Hyperflächen der Schar  $x^1 = \text{const} > 1$  mögen wieder zeitartig sein. Wir nehmen an, daß diese Schar in einem Bereich  $1 < x^1 \leq b$  existiert. Dann gilt in diesem Bereich unser Theorem über das Schneiden von Hyperflächen verschiedenen Charakters. Jede Nullhyperfläche mit Punkten in diesem Bereich (d. h. also mit Punkten, für die  $1 < x^1 \leq b$  ist) muß somit jede im Bereich  $1 < x^1 \leq b$  verlaufende glatte, zeitartige Hyperfläche schneiden. Insbesondere schneidet sie also alle Hyperflächen  $x^1 = \text{const}$  mit  $1 < \text{const} \leq b$ . Hieraus folgt einerseits, daß jede derartige Nullhyperfläche der Nullfläche  $x^1 = 1$  beliebig nahe kommen muß, sie also entweder durchstößt oder asymptotisch zu ihr verläuft. Andererseits besitzt aber diese Nullhyperfläche auch Punkte mit  $x^1$ -Werten, die beliebig nahe dem Wert  $x^1 = b$  kommen; d. h. sie besitzt Punkte, deren  $x^1$ -Koordinate von  $x^1 = 1$  um einen endlichen Betrag  $\Delta x^1 = b - 1$  differiert<sup>12)</sup>. — Ähnliche Verhältnisse bestehen auch im Halbraum  $V^-$ .

Diese globale Eigenschaft der Nullfläche  $\Sigma$  werden wir durch die Feststellung beschreiben, daß  $\Sigma$  eine „global isolierte Nullfläche“ ist.

<sup>12)</sup> Existiert die Schar der zeitartigen Flächen  $x^1 = \text{const} > 1$  im ganzen  $V^+$ , ist also  $b = \infty$ , so besitzt jede Nullfläche des  $V^+$  Punkte, für die der Betrag  $\Delta x^1$  sogar beliebig groß ist. Das ist z. B. der Fall im Halbraum  $V^+$  des Schwarzschildschen Raums (2).

## § 7.

Ein Riemannscher  $V_4$ , in dem eine asymptotische Nullfläche  $\Sigma$  existiert, besitzt eine Anzahl von Eigenschaften, durch welche seine physikalische Verwendbarkeit in Frage gestellt wird. Wir wollen dies zunächst kurz am Beispiel eines kugelsymmetrischen  $V_4$  mit asymptotischer Nullhyperfläche  $\Sigma$  erläutern.

Ist die Flächenschar  $S$ , deren asymptotische Fläche die Nullfläche  $\Sigma$  ist, zeitartig, so haben alle zu  $\Sigma$  asymptotisch verlaufenden zeitartigen Geodäten eine (in einer Richtung) endliche Bogenlänge. Wie im § 3 gezeigt, erreichen diese Geodäten die Fläche  $\Sigma$  für einen unendlich großen Wert der Koordinatenzeit  $x^0$ . Ist nun eine dieser Geodäten die Weltlinie eines Teilchens, so entspricht einer endlichen Eigenzeit des betreffenden Teilchens eine unendliche Koordinatenzeit. Dieser — für den Fall des Schwarzschildschen  $V^+$  mehrfach diskutierte<sup>13)</sup> — Tatbestand impliziert eine unendlich große relativistische Rotverschiebung. Das Teilchen bleibt im Raum „stecken“.

Ist hingegen die Flächenschar  $S$  raumartig (wie z. B. die Flächenschar  $r = \text{const} < 1$  im Schwarzschildschen  $V^-$ ), so erreichen die asymptotischen zeitartigen Geodäten die Fläche  $\Sigma$  im räumlich Unendlichen (s. § 5). Ist eine dieser Geodäten, die eine endliche Gesamtlänge hat, die Weltlinie eines Teilchens, so folgt: In dem gegebenen  $V_4$  gelangt das Teilchen nach einer — in seiner Eigenzeit gemessenen — endlichen Zeitdauer aus dem Unendlichen des dreidimensionalen Raums ins Endliche oder umgekehrt.

Auch in bezug auf das Cauchy'sche Anfangswertproblem können sich eigenartige Verhältnisse ergeben. Gilt z. B.  $g^{11} > 0$  sowohl für  $x^1 > 1$  also auch für  $x^1 < 1$ , hat also  $g^{11}$  auf  $\Sigma$  eine gerade Nullstelle und nimmt man als Cauchy'sche Anfangsfläche eine der raumartigen Hyperflächen  $x^1 = \text{const} > 1$ , so gibt es Teilchenlinien, die diese Fläche überhaupt nicht durchstoßen.

Diese Eigenschaften von inkompletten Räumen scheinen uns auf die Notwendigkeit hinzuweisen, bei der allgemeinrelativistischen Diskussion von physikalischen Problemen Räume mit einer asymptotischen Nullfläche  $\Sigma$  a priori auszuschließen. Wir wollen jedoch noch zeigen, daß auch bei Zulassung von solchen Räumen das im Teil I dieser Arbeit gewonnene Ergebnis über die Nichtexistenz einer zeitlich periodischen singularitätsfreien Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen (1) seine Gültigkeit behält.

Eine eventuelle Modifizierung dieses Ergebnisses bei Zulassung von inkompletten Räumen könnte auf Grund der folgenden Betrachtung möglich erscheinen. Bei der Diskussion der zeitlich periodischen Lösungen von (1) wurde gezeigt<sup>14)</sup>, daß bei Forderung der Grenzbedingung  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  für  $r \rightarrow \infty$  das Gravitationsfeld  $g_{\mu\nu}$  außerhalb eines endlichen Bereichs des dreidimensionalen Raums überall wesentlich zeitunabhängig sein muß. Demnach muß ein periodisches singularitätsfreies Gravitationsfeld dadurch entstehen, daß ein in einem endlichen dreidimensionalen Bereich zeitlich periodisches Feld mittels einer ebenfalls zeitlich periodischen, im dreidimensionalen Raum geschlossenen, isotropen Sprungfläche  $\Sigma$  an das äußere zeitunabhängige Feld

<sup>13)</sup> Vgl. z. B. P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig 1952, S. 70.

<sup>14)</sup> A. Papapetrou, *Ann. Physik* (6) **20**, 399 (1957); (7) **1**, 186 (1958).

angeschlossen wird. Im Teil I wurden nun inkomplette Räume außer acht gelassen und die Nichtexistenz von periodischen singularitätsfreien Lösungen von (1) aus der Tatsache geschlossen, daß in einem kompletten  $V_4$  jede Nullfläche sich bis ins Unendliche des dreidimensionalen Raums erstreckt. In inkompletten Räumen kann es aber asymptotische Nullflächen  $\Sigma$  geben, die — ähnlich wie die Schwarzschildsche Fläche (3) — im Endlichen des dreidimensionalen Raums verlaufen.

Wir werden nun in diesem Paragraphen zunächst zeigen, daß bei wesentlicher Zeitunabhängigkeit der Metrik  $g^+_{\mu\nu}$  des  $V^+$  die asymptotische Nullfläche  $\Sigma$  ebenfalls zeitunabhängig ist. Hierzu legen wir im  $V^+$  ein Koordinatensystem zugrunde, in dem

$$g^+_{\mu\nu,0} = 0 \quad (24)$$

gilt. In diesem Koordinatensystem müssen die Flächen  $S$  und  $\Sigma$  die Koordinatenlinien von  $x^0$  enthalten. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so würde durch eine beliebige Translation in der  $x^0$ -Richtung aus den Flächen  $S$  und  $\Sigma$  neue Flächen  $S'$  und  $\Sigma'$  entstehen. Dann würde es aber zur Fläche  $\Sigma$  global benachbarte Nullflächen  $\Sigma'$  geben, was im Widerspruch zum Ergebnis des § 6 steht. Somit muß eine Translation in der  $x^0$ -Richtung die Flächen  $S$  und  $\Sigma$  in sich selbst überführen. In einem die Bedingung (24) erfüllenden Koordinatensystem werden also die Flächen  $S$  und  $\Sigma$  durch Gleichungen von der Form

$$f(x^i) = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (25)$$

dargestellt.

Durch eine rein räumliche Transformation mit  $x^1 \rightarrow f(x^1)$ , die die Zeitunabhängigkeit der  $g^+_{\mu\nu}$  nicht aufhebt, können dann die Gleichungen der Nullfläche  $\Sigma$  auf die Form

$$z(x^2) \equiv x^1 - 1 = 0 \quad (26)$$

und die Gleichungen der Flächen  $S$  auf die Form  $x^1 = \text{const} > 1$  gebracht werden, wie dies im § 2 angenommen wurde. Dann gelten in diesem Koordinatensystem die Beziehungen (6c), (11) und (8).

Weiter kann noch durch Transformationen von der Form  $x^2 \rightarrow x^2 + \psi(x^1)$  und  $x^3 \rightarrow x^3 + w(x^1)$  bei unverändertem  $x^1$  und  $x^0$  noch erreicht werden, daß wieder

$$g^{12} = g^{13} = 0 \quad (27)$$

gilt. Nach (10) fallen dann auf  $\Sigma$  die diese Fläche aufspannenden Nullgeodäten mit den Koordinatenlinien von  $x^0$  zusammen. Der Tangentialvektor der Bicharakteristiken der Fläche  $\Sigma$  hat also die Komponenten

$$p^1 = p^2 = p^3 = 0, \quad p^0 = (g^{10})_x, \quad (28)$$

wobei  $(g^{10})_x$  die Funktion  $g^{10}$  für  $x^1 = 1$  bedeutet.

Die durch die Gl. (26) gegebene Nullfläche  $\Sigma$  soll nun die für die Konstruktion der periodischen singularitätsfreien Lösung zu verwendende Sprungfläche der Einsteinschen Gleichungen (1) sein. Im folgenden Paragraphen werden wir mit Hilfe der allgemeinen Sprungrelationen von Stellmacher<sup>15)</sup> die Form der an dieser Sprungfläche möglichen Sprünge ermitteln, woraus sich ergeben wird, daß eine solche Konstruktion nicht möglich ist.

<sup>15)</sup> K. Stellmacher, Math. Annalen 115, 741 (1938).

## § 8.

Um konkret argumentieren zu können, nehmen wir zunächst an, daß die niedrigsten unstetigen Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  die zweiten Ableitungen sind, also ein Sprungproblem zweiter Ordnung vorliegt. Dann ist der Sprung der Ableitungen  $g_{\mu\nu, \varrho\sigma}$  an  $\Sigma$  durch

$$[g_{\mu\nu, \varrho\sigma}] = \gamma_{\mu\nu} p_{\varrho} p_{\sigma} \quad \text{mit} \quad \gamma_{\mu\nu} = \left[ \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^2} \right] \quad (29)$$

gegeben. Gemäß (26) und (6a) sind also die einzigen unstetigen Ableitungen die zweifachen Ableitungen nach  $x^1$ :

$$[g_{\mu\nu, 11}] = \gamma_{\mu\nu}, \quad \text{alle anderen} \quad [g_{\mu\nu, \varrho\sigma}] = 0. \quad (30)$$

Die Änderung des Sprungtensors  $\gamma_{\mu\nu}$  längs einer Bicharakteristik wird durch die differentiellen Sprungrelationen Stellmachers bestimmt. Bei der Anwendung dieser Relationen im vorliegenden Fall ist aber zu beachten, daß ihre von Stellmacher angegebene Form eine Darstellung  $z(x^\alpha) = 0$  der Sprungfläche  $\Sigma$  voraussetzt, bei der der Normalvektor  $p^\mu \equiv z_{,\mu}$  die Stationaritätsbedingung

$$(g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)_{,\tau} = 0 \quad (31)$$

auf der Fläche  $\Sigma$  erfüllt. In Stellmachers Arbeit wird nämlich angenommen, daß die Bicharakteristiken die normalisierte Geodätengleichung

$$p_{\mu;\nu} p^\nu = p_{\mu,\nu} p^\nu + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau}_{,\mu} p_\sigma p_\tau = 0 \quad (32)$$

erfüllen. Bei der Darstellung der Nullfläche  $\Sigma$  durch die Gl. (26) ist (31) aber im allgemeinen nicht erfüllt. Denn gemäß (6a) gilt hier

$$(g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu)_{,1} = g^{11}_{,1}. \quad (33)$$

Verschwindet also für  $x^1 = 1$  zwar  $g^{11}$  aber nicht  $g^{11}_{,1}$ , hat also  $g^{11}$  für  $x^1 = 1$  eine einfache Nullstelle, so sind Stellmachers Voraussetzungen (31) bzw. (32) nicht erfüllt.

Um Stellmachers Gleichungen trotzdem unmodifiziert anwenden zu können, bemerken wir, daß eine durch die Gleichung (26) beschriebene Nullfläche  $\Sigma$  auch durch eine Gleichung von der Form

$$\bar{z} \equiv z \varphi(x^\alpha) = (x^1 - 1) \varphi(x^\alpha) = 0 \quad (34)$$

dargestellt werden kann, wo  $\varphi(x^\alpha)$  eine beliebige auf  $\Sigma$  nirgends verschwindende und stetig differenzierbare Funktion ist. Es gilt dann

$$\bar{p}_\mu = \bar{z}_{,\mu} = \varphi p_\mu + (x^1 - 1) \varphi_{,\mu} \rightarrow \varphi p_\mu \text{ auf } \Sigma. \quad (34a)$$

Der Sprung von  $g_{\mu\nu, \varrho\sigma}$  auf  $\Sigma$  bekommt jetzt die Form

$$[g_{\mu\nu, \varrho\sigma}] = \bar{\gamma}_{\mu\nu} \bar{p}_\varrho \bar{p}_\sigma = \bar{\gamma}_{\mu\nu} \varphi^2 p_\varrho p_\sigma, \quad (35)$$

wobei für  $\varphi$  die Werte auf der Sprungfläche  $\Sigma$  zu nehmen sind.

Die Funktion  $\varphi(x^\alpha)$  können wir auf  $\Sigma$  nun so bestimmen, daß in der neuen Darstellung (34) der Sprungfläche der Normalvektor  $p_\mu$  die Gln. (31) bzw. (32) erfüllt. Im vorliegenden Fall findet man unmittelbar, daß diese Forderung für  $\varphi$  die Gleichung

$$(g^{11}_{,1})_x \varphi + 2 (g^{10})_x \varphi_{,0} = 0 \quad (36)$$

liefert, wobei wieder  $(\dots)_x$  die Werte der Funktion  $(\dots)$  auf  $\Sigma$  bedeutet. Aus (30) ergibt sich für die Funktion  $\varphi$  die auf  $\Sigma$  geltende Beziehung

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}\beta x^0} \quad \text{mit} \quad \beta = \left( \frac{g^{11}_{,1}}{g^{10}} \right)_x, \quad (37)$$

wobei also  $\beta$  nur von  $x^2$  und  $x^3$  abhängt.

Da mit (37) der Normalvektor  $\bar{p}_\mu$  von  $\Sigma$  die Stationaritätsbedingung (31) erfüllt, können wir zur Bestimmung des durch (35) definierten neuen Sprungtensors  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  unmittelbar Stellmachers Sprungrelationen anwenden. Dabei ist es zweckmäßig, von vornherein nur die wesentlichen Sprünge zu betrachten, d. h. alle durch Koordinatentransformationen eliminierbaren Unstetigkeiten als bereits forttransformiert anzunehmen<sup>16)</sup>.

Für diese wesentlichen  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  ergibt sich gemäß Stellmacher folgende Struktur

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \pi_\mu \tilde{\pi}_\nu + \tilde{\pi}_\mu \pi_\nu, \quad (38)$$

mit den beiden reellen Vektoren

$$\pi_\mu = P (e^{i\delta} \omega_\mu + e^{-i\delta} \bar{\omega}_\mu), \quad \tilde{\pi}_\mu = \frac{1}{i} P (e^{i\delta} \omega_\mu - e^{-i\delta} \bar{\omega}_\mu). \quad (39)$$

Für die beiden Skalare, Amplitudenfaktor  $P$  und Polarisationswinkel  $\delta$ , gelten die Differentialgleichungen

$$(\sqrt{-g} P^4 \bar{p}^0)_{,e} = 0 \quad \text{und} \quad \delta_{,e} \bar{p}^0 = 0. \quad (40)$$

Die konjugiert komplexen Hilfsvektoren  $\omega_\mu$  und  $\bar{\omega}_\mu$  sind hierbei so zu wählen, daß sie den algebraischen Bedingungen

$$\omega_\mu \bar{p}^\mu = 0, \quad (41a)$$

$$(g^{\mu\nu})_x \omega_\mu \omega_\nu = 0, \quad (g^{\mu\nu})_x \omega_\mu \bar{\omega}_\nu = -\frac{1}{2} \quad (41b)$$

und daher der Differentialgleichung

$$p_\nu \omega_{\mu;\sigma} \bar{p}^\sigma - p_\mu \omega_{\nu;\sigma} \bar{p}^\sigma = 0 \quad (42)$$

genügen.

Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß in der hier betrachteten Metrik auf  $\Sigma$

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^3 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{02}^3 = 0$$

<sup>16)</sup> Es ist evident, daß eine eventuelle Zeitabhängigkeit von  $g_{\mu\nu}$ , die auf  $\Sigma$  nur zu forttransformierbaren Unstetigkeiten der Normalableitungen von  $g_{\mu\nu}$  führt, nur scheinbar ist.

gilt. Danach kann man den Bedingungen (41a) und (42) dadurch genügen, daß man

$$\omega_0 = \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_2(x^2, x^3), \quad \omega_3 = \omega_3(x^2, x^3) \quad (43)$$

setzt. Hierbei müssen die vier in  $\omega_2$  und  $\omega_3$  enthaltenen Funktionen noch so gewählt sein, daß die drei Bedingungen (41b) erfüllt werden, was ohne weiteres möglich ist, da  $(g^\mu)_{,2}$  ebenfalls nur von  $x^2$  und  $x^3$  abhängt. Ferner ergibt sich aus (34a) und (36)

$$\bar{p}^0_{,0} = 0$$

und somit aus (40)

$$P_{,0} = \delta_{,0} = 0. \quad (44)$$

Aus (38), (39), (43) und (44) folgt dann sofort

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu,0} = 0 \quad (45)$$

und somit die Konstanz des Sprungtensors  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  längs einer Bicharakteristik. Kehren wir nun zu der Formel (35) zurück, so finden wir wegen (37)

$$[g_{\mu\nu,11}] = \bar{\gamma}_{\mu\nu} e^{-\beta x^0}. \quad (46)$$

(46) läßt sich unmittelbar auf den Fall verallgemeinern, daß die ersten unstetigen Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  von der Ordnung  $n$  (mit  $n \geq 1$ ) sind. In die Gl. (35) tritt dann nämlich einfach der Faktor  $\varphi^n$  an Stelle des Faktors  $\varphi^2$ , so daß man an Stelle von (46)

$$\left[ \frac{\partial^n g_{\mu\nu}}{(\partial x^1)^n} \right] = \bar{\gamma}_{\mu\nu} e^{-\frac{n}{2} \beta x^0} \quad (47)$$

erhält.

Ist nun  $(g^{11})_E \neq 0$ , d. h. hat  $g^{11}$  auf der asymptotischen Nullfläche  $\Sigma$  eine einfache Nullstelle, so bedeutet (47) eine exponentielle Zeitabhängigkeit der wesentlichen Sprünge der niedrigsten unstetigen Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$ . Eine derartige Zeitabhängigkeit ist natürlich mit einer zeitlichen Periodizität der  $g_{\mu\nu}$  im Halbraum  $V^-$  nicht verträglich; sie würde darüber hinaus dazu führen, daß die  $g_{\mu\nu}$  im zeitlich Unendlichen des  $V^-$  wesentlich singulär sind. Daher ist im Fall einer einfachen Wurzel von  $g^{11}$  die Fläche  $\Sigma$  keine für unser Problem zulässige Sprungfläche.

Verschwindet dagegen auf  $\Sigma$  neben  $g^{11}$  auch  $g^{11,1}$ , so werden gemäß (47) die Sprünge der niedrigsten unstetigen Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$  an  $\Sigma$  zeitunabhängig. Die Anschließbarkeit eines wesentlich zeitlich periodischen  $g_{\mu\nu}$ -Feldes an das zeitunabhängige  $g_{\mu\nu}$ -Feld mit Hilfe von Sprüngen an der Fläche  $\Sigma$  muß dann auf Grund der Sprungrelationen höherer Ordnung diskutiert werden, da die  $g_{\mu\nu}$  durch die  $g_{\mu\nu}^+$  und die Unstetigkeiten aller Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$  an  $\Sigma$  bestimmt sind. Die betreffenden Sprungrelationen sind die aus den Einsteinschen Gravitationsgleichungen folgenden Bedingungen für die Unstetigkeiten der  $(n+i)$ ten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$ . Eine vorläufige qualitative Diskussion dieses Problems hat ergeben, daß die Sprungrelationen höherer Ordnung eine zeitliche Periodizität der  $g_{\mu\nu}^-$  ausschließen, wenn die  $g_{\mu\nu}^+$  und die Sprünge niedrigster Ordnung zeitunabhängig sind<sup>17)</sup>.

<sup>17)</sup> Eine ausführliche Behandlung dieser Frage soll in einer späteren Arbeit erfolgen.



Es ist demnach nicht möglich, mit Hilfe von Sprüngen an einer räumlich geschlossenen asymptotischen Nullfläche  $\Sigma$  ein wesentlich zeitlich periodisches  $g_{\mu\nu}^-$ -Feld an ein zeitunabhängiges  $g_{\mu\nu}^+$ -Feld anzuschließen. Daher gilt auch bei Zulassung von topologisch inkompletten Räumen mit global isolierten asymptotischen Nullflächen  $\Sigma$  das in Teil I hergeleitete Theorem: Es gibt kein zeitlich periodisches Gravitationsfeld  $g_{\mu\nu}$ , welches überall die Einsteinschen Feldgleichungen (1) befriedigt und der Grenzbedingung  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  für  $r \rightarrow \infty$  genügt.

Berlin, Institut für reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 29. Januar 1960.

# Über die Temperaturabhängigkeit der kurzwelligen Ausläuferabsorption von MgO im Ultraroten

Von R. Groth<sup>1)</sup>

Mit 12 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Die kurzwellige Ausläuferabsorption der Gitterschwingungen von MgO wurde im Wellenlängengebiet von 5 bis 10  $\mu$  zwischen 20° und 1500 °C untersucht. Für die Durchlässigkeitsmessungen an den MgO-Einkristallen wurden zwei Heizvorrichtungen entwickelt. Die Absorptions-Isochromaten steigen bei höheren Temperaturen linear mit  $T$  an, wie es von der Born-Huang-schen Theorie für einen Absorptionsprozeß durch elektrische Momente 2. Ordnung (Anteil an Valenzbindung im Kristallgitter) gefordert wird. Aus ihrem Verlauf bei tieferen Temperaturen ergibt sich, daß von den zwei möglichen Anregungsprozessen beide an der Gesamtaborption beteiligt sind.

## Einleitung

Die Bereiche selektiver Reflexion und Absorption von Ionenkristallen im Ultraroten beruhen nach der elementaren klassischen Theorie<sup>2)</sup> auf der Wechselwirkung der elektromagnetischen Wellen mit den optischen Dispersionsfrequenzen des Kristallgitters. Dabei sind die Dispersionsfrequenzen die „Grenzfrequenzen“, für welche die Gesamtheit der positiv geladenen Ionen als starres Gebilde gegen die negativen Ionen des Gitters schwingt. Die Absorption in der Umgebung der Dispersionsfrequenzen wird durch die Kopplung der Dispersionsoszillatoren mit allen anderen Schwingungen des Kristallgitters hervorgerufen. In der elementaren Theorie berücksichtigt man diese verwickelte Wechselwirkung durch Einführung einer Dämpfungs-konstanten in die Dispersionsformel, die naturgemäß nur zu einer ad hoc-Formel führt und eine einfache Absorptionsbande liefert.

So war es auch nicht überraschend, daß man mit der Verbesserung der Ultrarotmeßtechnik bald nachwies, daß diese Formel die tatsächlichen Verhältnisse nicht befriedigend wiedergibt. Für kubische Kristalle ist z. B. nach der elementaren Theorie nur eine Dispersionsfrequenz und damit eine einfache Absorptionsbande zu erwarten. Durch Absorptionsmessungen von M. Czerny<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Marburger Dissertation D 4, vorgetragen auf der Physiker-Tagung in Berlin 1959.

<sup>2)</sup> Literatur siehe b. M. Born, Atomtheorie des festen Zustands, Leipzig 1923.

<sup>3)</sup> M. Czerny, Z. Physik 65, 600 (1930).

sowie R. B. Barnes und M. Czerny<sup>4)</sup> an dünnen NaCl- und KCl-Schichten wurde aber im Wellenlängengebiet um die Resonanzfrequenz eine ausgeprägte Feinstruktur der Absorptionsbande nachgewiesen. R. B. Barnes<sup>5)</sup> hat die Untersuchungen auf mehrere Alkalihalogenide ausgedehnt und in jedem Falle ein Nebenmaximum auf der kurzwelligen Seite der Dispersionsfrequenz gefunden.

Eine theoretische Deutung dieser Feinstruktur haben mit den Methoden der klassischen Mechanik M. Born und M. Blackman<sup>6)</sup> 7) gegeben. Sie untersuchen den Einfluß von anharmonischen Anteilen im Gitterpotential auf die Kopplung der Gitteratome und erhalten eine wellenlängenabhängige Dämpfungskonstante. Damit ist das Auftreten von Nebenmaxima verständlich. Eine quantenmechanische Behandlung der Kopplung der Dispersionsoszillatoren mit den anderen Schwingungen des Kristallgitters über anharmonische Anteile im Gitterpotential wurde von R. B. Barnes, R. R. Brattain und F. Seitz<sup>8)</sup> durchgeführt. Diese Berechnungen führen ebenfalls zu dem Ergebnis, daß in der Umgebung der Resonanzstelle Absorptionsmaxima auftreten.

Von sehr allgemeinen Voraussetzungen ausgehend haben dann M. Born und K. Huang<sup>9)</sup> eine dynamische Theorie der Kristallgitter entwickelt und die optischen Effekte eingehend diskutiert. In der Born-Huang'schen Theorie wird einmal die Kopplung der Dispersionsoszillatoren mit anderen Gitterschwingungen über Glieder 3. und 4. Ordnung im Gitterpotential und zum anderen die Wechselwirkung der Lichtwelle mit elektrischen Momenten höherer Ordnung behandelt. Für beide Fälle ergibt die Theorie eine andere Temperaturabhängigkeit der Ultrarotabsorption. Ihre Messung sollte damit wertvolle Aufschlüsse darüber geben, welcher Effekt für die zum Teil sehr breiten Absorptionsbanden den entscheidenden Beitrag liefert. Wie in Abschnitt IIIb ausgeführt wird, sind dafür Messungen des Absorptionskoeffizienten über einen größeren Temperaturbereich und besonders bei hohen Temperaturen erforderlich.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Absorptionsmessungen in einem größeren Wellenlängengebiet der kurzwelligen Ausläuferabsorption der Ultrarotbande. Als Substanz wurde Magnesiumoxyd gewählt, weil beim MgO die Ausläuferabsorption gegenüber den meisten Alkalihalogeniden bis zu ziemlich kleinen Wellenlängen (etwa  $5\mu$  bei Raumtemperatur) reicht. Die Untersuchungen können also in einem Wellenlängengebiet durchgeführt werden, in dem experimentell noch keine besonderen Schwierigkeiten auftreten. Weiterhin ist das MgO heute in Form klarer, durchsichtiger Einkristalle von mehreren Zentimetern Kantenlänge herstellbar. Ein entscheidender Vorteil liegt ferner in seiner Beständigkeit bis zu hohen Temperaturen (1600 °C im Vakuum).

<sup>4)</sup> R. B. Barnes u. M. Czerny, Z. Physik **72**, 447 (1931).

<sup>5)</sup> R. B. Barnes, Z. Physik **75**, 723 (1932).

<sup>6)</sup> M. Born u. M. Blackman, Z. Physik **82**, 551 (1933).

<sup>7)</sup> M. Blackman, Z. Physik **86**, 421 (1933).

<sup>8)</sup> R. B. Barnes, R. R. Brattain u. F. Seitz, Physic. Rev. **48**, 582 (1935).

<sup>9)</sup> M. Born u. K. Huang, Dynamical Theory of Crystal Lattices, Oxford 1956.

## I. Apparativer Aufbau

### a) Hochtemperaturuntersuchungen

Die kurzwellige Ausläuferabsorption des MgO läßt sich bei Verwendung von dicken Einkristallen (einige mm) bis etwa  $5\ \mu$  erfassen. Zu größeren Wellenlängen hin steigt die Absorption stark an, so daß für eine genaue Bestimmung des Absorptionskoeffizienten die Schichtdicken entsprechend vermindert werden müssen. Mit Kristallen bis zu einigen Zehntel mm Dicke, die sich noch einwandfrei polieren lassen und auch mechanisch für Messungen bei höheren

Temperaturen stabil genug sind, kann das Wellenlängengebiet bis zu  $10\ \mu$  erfaßt werden. Für Durchlässigkeitsmessungen in Abhängigkeit von der Temperatur ist man auf eine indirekte Heizung der Kristalle angewiesen, da eine direkte Heizung von Raumtemperatur aufwärts wegen des hohen elektrischen Widerstandes von MgO ausscheidet.

Es wurde deshalb für diese Untersuchungen ein Hochvakuumofen entwickelt, der bis etwa  $2000\ ^\circ\text{C}$  verwendet werden kann. Der wesentliche apparative Aufbau ist aus Abb. 1 ersichtlich. Das Heizrohr für die Kristalle besteht aus einem 10 cm langen Tantalrohr von 10 mm Innendurchmesser und 0,2 mm Wandstärke. Es ist am oberen Ende über zwei massive Molybdänbacken mit der einen Kupferelektrode verbunden. Das untere Ende des Heizrohres wird ebenfalls zwischen zwei Molybdänbacken eingespannt und der Strom über vier 0,1 mm

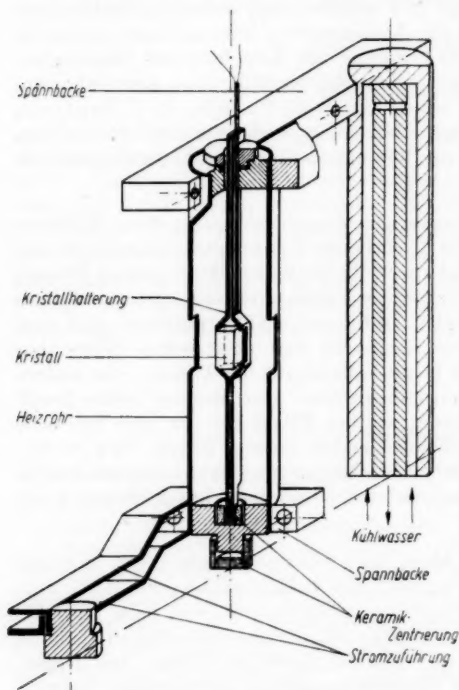


Abb. 1. Heizrohr mit Kristallhalterung

dicke, 12 mm breite Tantalbleche zugeführt. Die Tantalbleche sind symmetrisch angeordnet und bei diesen Abmessungen noch so elastisch, daß sie der Wärmeausdehnung des Rohres beim Aufheizen leicht nachgeben. Selbst bei Temperaturen von  $2200\ ^\circ\text{C}$  treten bei einem Heizstrom von etwa 320 Amp. noch keine Kontaktschwierigkeiten auf, und auch das Tantalrohr erleidet keinen Schaden. Ein seitliches Nachgeben der 4 Zuführungsbleche, das zu einer für optische Messungen unerwünschten Verschiebung des Heizrohres quer zum Strahlengang führt, wird durch eine Führung in einem Keramikrohr verhindert.

Die Kristallhalterung besteht aus zwei 0,4 mm dicken Tantalblechen, die punktgeschweißt sind und in der Mitte der jeweiligen Kristalldicke entsprechend taschenförmig aufgebogen werden. Um die Meßstrahlung durchzulassen, sind in der Halterung und im Heizrohr in Höhe des Kristalls gegenüberliegende Schlitzze angebracht. Die Kristallhalterung selbst hängt im Heizrohr in einer drehbaren Fassung und wird unten in Keramik, das mit einem passenden Schlitz versehen ist, geführt. Damit ist der Kristall bequem quer zum Strahlengang drehbar und in seiner Lage im Heizrohr genau fixiert.

Die Kristalltemperatur wird am zweckmäßigsten mit einem Thermoelement (PtRh—Pt) gemessen. Um einen ausreichenden Wärmekontakt zu schaffen, wurde dabei die Lötstelle des Thermopaars auf ein größeres Stück Platinblech aufgepunktet und das Platinblech wiederum im Inneren der Kristallhalterung aufgeschweißt. Die gesamte Heizvorrichtung ist auf einer Trägerplatte in einem doppelwandigen, wassergekühlten Metallzylinder montiert, der in Kristallhöhe für die Meßstrahlung zwei gegenüberliegende Fensterfassungen enthält. Als Ultrarotfenster werden bis  $8,5 \mu$  Arsensulfidglas und bei größeren Wellenlängen, bei denen die Absorption des Arsensulfid störend wird, NaCl-Fenster verwendet.

Das Hochvakuum für den Ofen lieferte eine dreistufige Öl-Diffusionspumpe mit vorgeschalteter Kühlfalle, die ein Endvakuum besser  $2 \cdot 10^{-5}$  Torr bis zu Temperaturen über  $1500^\circ\text{C}$  gewährleistete. Ein gutes Vakuum erweist sich für Durchlässigkeitsmessungen bei hohen Temperaturen als unbedingt erforderlich, weil sich sonst durch Sauerstoff- und Wasserdampfreste Molybdän- und Tantaloxys bilden, die schon bei wesentlich niedrigeren Temperaturen als die Metalle selbst verdampfen und störende Niederschläge auf den Kristalloberflächen hervorrufen.

#### b) Messungen im Temperaturbereich von $20^\circ$ bis $800^\circ\text{C}$

Bei hohen Temperaturen kann die Temperaturabhängigkeit der Absorption mit dem Vakuumofen schnell gemessen werden, weil der Temperatureausgleich zwischen Heizrohr und Kristallhalterung in kurzer Zeit erfolgt. Unter-

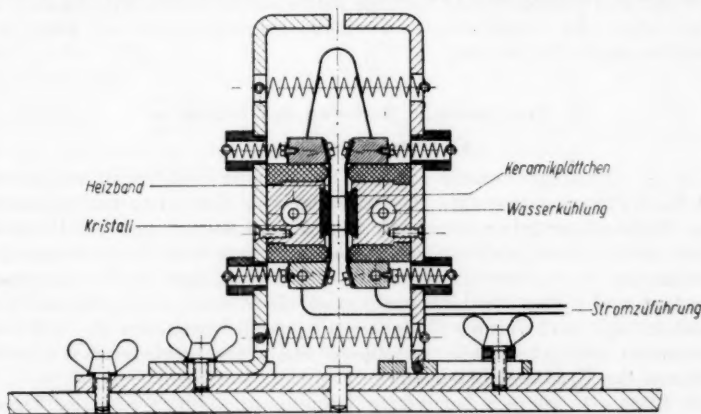


Abb. 2. Heizvorrichtung für Absorptionsmessungen von  $20^\circ\text{C}$  bis  $800^\circ\text{C}$

halb von 500 °C sind jedoch schon so beträchtliche Einstellzeiten erforderlich, daß das Meßsignal durch Nullpunktswanderungen des Verstärkers verfälscht werden kann. Fordert man in diesem Temperaturbereich kurze Einstellzeiten, so empfiehlt es sich, einen direkten Wärmekontakt zwischen Heizkörper und Kristall zu schaffen. Für Messungen von Raumtemperatur aufwärts wurde deshalb eine weitere Apparatur gebaut, die diesen Forderungen entspricht (Abb. 2).

Die Kristalle werden mit ihren gut geschliffenen Seitenflächen zwischen zwei 0,1 mm dicke Platinbänder eingespannt. Diese werden direkt geheizt und liegen fest auf zwei Keramikplättchen auf, die in einer Führung auf zwei wassergekühlten Kupferblöcken sitzen. Von den beiden Metallbügeln wird der eine auf der Trägerplatte schwimmend geführt. Bei dieser Führung ziehen die beiden Federn den Bügel so an, daß sich das Heizblech genau der Kristallfläche anpaßt.

Die Kristalltemperatur wird mit einem Thermoelement (NiCr—Ni) gemessen, dessen Kontaktierung aus Abb. 3 ersichtlich ist. In der Mitte des Kristalls sind mit Ultraschall zwei feine Kanäle von 0,2 mm Durchmesser gebohrt, in die dünne Thermodrähte so eingezogen werden, daß die Lötstelle mitten in einer etwa 0,3 mm tiefen Einsenkung der Kristalloberfläche sitzt, die ebenfalls mit Ultraschall hergestellt wird. Um einen guten Wärmekontakt zwischen der Lötstelle und dem Kristall zu schaffen, wird die Vertiefung mit Glaspulver von einem hohen Erweichungspunkt (Philips G28) gefüllt, und der Kristall auf etwa 1000 °C erwärmt. Dann verläuft das Glas in der

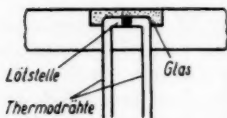


Abb. 3. Kontaktierung des Thermoelements

Vertiefung gleichmäßig und schließt dabei die Lötstelle ein. Der so geschaffene Kontakt ist sehr fest, da das Glas auf der Kristalloberfläche gut haftet. Die MgO-Kristalle sind ebenfalls mechanisch noch stabil genug, um beim Bohren der Löcher keinen Schaden zu erleiden. Schwierigkeiten treten nur bei den dünnen Kristallen von 0,4 bis 0,8 mm auf, von denen einige nach dem Einschmelzen des Thermoelements Sprünge aufwiesen, die durch Spannungen im Kristall wegen der verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten von Glas und Kristall hervorgerufen wurden.

## II. Experimentelle Methoden und Ergebnisse

### a) Versuchsanordnung

Für die Messungen wurde ein Grubb-Parson-S3A-Spektrometer mit einem NaCl-Prisma verwendet. Die Dispersion von NaCl ist in dem interessierenden Wellenlängengebiet von 5 bis 10  $\mu$  überall so gut, daß ein Prismenwechsel nicht erforderlich ist. Der Strahlengang vor dem Eintrittsspalt des Spektrometers ist in Abb. 4 dargestellt. Die vier Spiegel sind symmetrisch angeordnet und bilden die Lichtquelle über ein Zwischenbild, das auf dem Kristall erzeugt wird, auf den Eintrittsspalt des Spektrometers ab. Vor dem Eintrittsspalt befindet sich ein verstellbarer Spalt, der die oberen und unteren Randzonen des Kristalls abblendet.

Für Ultrarotmessungen bei hohen Temperaturen, für welche die Eigenstrahlung der untersuchten Substanz beträchtlich größer als das Meßsignal



werden kann, sind naturgemäß nur Wechsellichtmethoden anwendbar. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde als Strahlungsempfänger eine pneumatische Zelle (Unicam Golay Detektor) verwendet, bei der neben hoher Empfindlichkeit ein Meßprinzip verwirklicht ist, das auch bei starker Eigen-

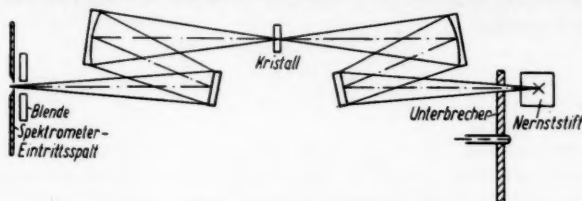


Abb. 4. Versuchsanordnung

strahlung der Substanz eine Verfälschung der Messungen ausschließt. Die Meßstrahlung wurde mit 10 Hz moduliert. Dabei befand sich die Unterbrecherscheibe unmittelbar vor der Lichtquelle, um eine unerwünschte Modulation der Eigenstrahlung zu verhindern.

#### b) Absorptionsmessungen bei Raumtemperatur

Gegenstand des ersten Teils der Untersuchungen waren Absorptionsmessungen bei Raumtemperatur. Das Ausgangsmaterial stellten größere Einkristalle von einigen cm Kantenlänge dar, aus denen Kristallplatten verschiedener Dicke abgespalten wurden. Diese waren meistens schon weitgehend planparallel und wurden nur noch mit Diamantscheiben abgestufter Körnung poliert. Insgesamt wurden im Bereich der kurzwelligen Ausläuferabsorption von MgO Durchlässigkeitsmessungen an 7 Kristallen durchgeführt. Um überall eine gleichbleibende Genauigkeit zu erhalten, variierten die Schichtdicken dabei annähernd gleichmäßig von 11 bis 0,4 mm. Die Strahlungsintensitäten wurden bei jeder Wellenlänge alternierend gemessen, um Fehlerquellen wie Nullpunktswanderungen des Verstärkers und langzeitige Schwankungen der Luftfeuchtigkeit auszuschalten. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 dargestellt. Die Absorption wird bei einer Schichtdicke von 11 mm in der Durchlässigkeitskurve bei Wellenlängen um  $5\mu$  merklich. Sie nimmt dann zu größeren Wellenlängen hin beträchtlich zu, und Strahlung von  $10\mu$  absorbiert ein Kristall von 0,4 mm bereits so stark, daß eine genaue Bestimmung des Absorptionskoeffizienten nicht mehr möglich ist. Auffallend an den Durchlässigkeitskurven ist eine gewisse Feinstruktur, auf die in IIIa näher eingegangen wird.

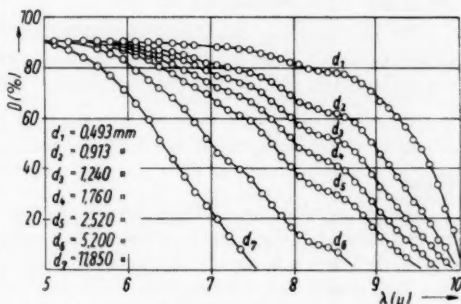


Abb. 5. Durchlässigkeit von MgO-Kristallen bei Raumtemperatur

Bei der Berechnung der Absorptionskoeffizienten aus den Meßkurven können Interferenzeffekte vernachlässigt werden, da in allen Fällen die Kristalldicken noch sehr groß gegenüber den Wellenlängen sind. In diesem Falle ist bei Lichteinfall senkrecht zur Oberfläche bei Berücksichtigung der Vielfachreflexe die Durchlässigkeit  $D$  mit den optischen Konstanten der Substanz durch die Beziehung

$$D = \frac{(1 - R_0)^2 \exp(-\alpha d)}{1 - R_0^2 \exp(-2\alpha d)} \quad (1)$$

verknüpft.

Dabei ist

$$R_0 = \frac{(n - 1)^2 + k^2}{(n + 1)^2 + k^2}$$

das Reflexionsvermögen einer Grenzfläche,

$$n = n - i k$$

der komplexe Brechungsindex  
und

$$k = \frac{\chi \cdot \lambda}{4\pi}$$

der wellenoptische Absorptionskoeffizient.

Eine Abschätzung ergibt, daß im Bereich der Ausläuferabsorption überall  $n \gg k$  und damit der Einfluß des Absorptionskoeffizienten auf das Reflexionsvermögen vernachlässigbar ist.

Die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten erfordert wegen der beiden Unbekannten  $R_0$  und  $k$  grundsätzlich Messungen für 2 Schichtdicken. Sie wird am einfachsten, wenn man das Verhältnis

$$D_1/D_2 = \exp(-\alpha(d_1 - d_2)) \frac{1 - R_0^2 \exp(-2\alpha d_2)}{1 - R_0^2 \exp(-2\alpha d_1)} \quad (2)$$

bildet.

Damit werden die Reflexionsverluste bis auf einen unwesentlichen Korrekturfaktor in der geschweiften Klammer eliminiert. Eine Abschätzung ergibt, daß dieser Korrekturfaktor höchstens um 0,27% von 1 abweichen kann und sich damit der Absorptionskoeffizient in den meisten Fällen schon hinreichend genau aus der einfachen Beziehung

$$D_1/D_2 = \exp(-\alpha(d_1 - d_2))$$

berechnen läßt, ohne daß ein Iterationsschritt erforderlich ist.

### c) Absorptionsmessungen in Abhängigkeit von der Temperatur

Die Temperaturabhängigkeit der Absorption wurde aus Relativmessungen in folgender Weise bestimmt.

Es sei

$$D_z = \frac{(1 - R_{0z})^2 \exp(-\alpha_z d)}{1 - R_{0z}^2 \exp(-2\alpha_z d)}$$

die vom Kristall bei Zimmertemperatur durchgelassene Strahlungsintensität, der ein Meßsignal  $A_z$  entspreche. Heizt man den Kristall auf die Temperatur  $T$  auf, so wird das Meßsignal durch die verstärkte Absorption auf  $A_T$  geschwächt. Für das Verhältnis  $A_T/A_z$  ergibt sich:

$$A_T/A_z = D_T/D_z = \exp(\alpha_z d - \alpha_T d) \left\{ \frac{1 - R_{0z}^2 \exp(-2\alpha_z d)}{1 - R_{0T}^2 \exp(-2\alpha_T d)} \right\} \frac{(1 - R_{0T})^2}{(1 - R_{0z})^2}, \quad (3)$$

wobei

$$D_T = \frac{(1 - R_{0T})^2 \exp(-\alpha_T d)}{1 - R_{0T}^2 \exp(-2\alpha_T d)}$$

die Durchlässigkeit bei der Temperatur  $T$  ist.  $\alpha_z$  und  $\alpha_T$  sind die entsprechenden Absorptionskoeffizienten. Ebenso wie in Gl. (2) stellt der Ausdruck in der geschweiften Klammer einen unwesentlichen Korrekturfaktor dar, der im allgemeinen vernachlässigt werden kann. Der Term  $(1 - R_{0T})^2/(1 - R_{0z})^2$  ist durch die Temperaturabhängigkeit des Reflexionsvermögens

$$R_{0T} = \frac{(n(T) - 1)^2}{(n(T) + 1)^2}$$

bedingt und kann leicht abgeschätzt werden. Es liegen zwar über die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex von MgO im Ultraroten keine Untersuchungen vor, aber die Verhältnisse sind sicher nicht sehr vom sichtbaren Spektralbereich verschieden, weil die beiden Resonanzfrequenzen, die den Brechungsindex weitgehend bestimmen, noch ziemlich weit entfernt sind (der Abstand zwischen Valenz- und Leitungsband beträgt etwa 10 eV und die Gitterresonanzfrequenz liegt bei  $17,3 \mu$ ). Legt man für eine Abschätzung den von Strong und Brice<sup>10)</sup> bei  $6563 \text{ \AA}$  gemessenen Temperaturkoeffizienten  $dn/dT = 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ Grad}^{-1}$  zugrunde, so ergibt sich für  $\Delta T = 1500^\circ \text{C}$   $(1 - R_{0T})^2/(1 - R_{0z})^2$  zu 1,004. Diese Korrektur kann vernachlässigt werden, weil sie innerhalb der erreichten Meßgenauigkeit liegt. Daß die Abschätzung den tatsächlichen Verhältnissen entspricht, wurde experimentell geprüft. Dazu wurden Kristalle im Vakuum-Ofen auf  $1500^\circ \text{C}$  hochgeheizt und die Durchlässigkeit bei Wellenlängen unterhalb von  $5 \mu$ , für welche die Absorption im Kristall vernachlässigbar ist, gemessen. In allen Fällen lag die Änderung von  $D$  gegenüber Raumtemperatur innerhalb der Meßgenauigkeit von 1%. Damit läßt sich  $\alpha_T$  aus der einfachen Beziehung

$$A_T/A_z = D_T/D_z = \exp(-(\alpha_T - \alpha_z) d) \quad (4)$$

und dem Zimmertemperaturwert bestimmen.

Die Durchlässigkeitsmessungen in Abhängigkeit von der Temperatur erfolgten im Wellenlängengebiet von 5 bis  $10 \mu$  bei etwa äquidistanten Wellenlängen in Temperaturintervallen von jeweils  $100^\circ$ . Um überall eine annähernd gleichbleibende Genauigkeit in der Bestimmung der Absorptionskoeffizienten zu erreichen, wurden Kristalle verschiedener Dicke (von 0,45 bis 2,8 mm) verwendet. Die Messungen wurden dabei in 2 Schritten durchgeführt, und zwar von  $20^\circ$  bis  $800^\circ \text{C}$  mit der Heizvorrichtung und von  $500^\circ$  bis  $1500^\circ \text{C}$  mit dem Vakuumofen. Im letzteren Falle war die „Bezugstemperatur“ nicht  $20^\circ$

<sup>10)</sup> J. Strong u. R. T. Brice, J. opt. Soc. Ann. 25, 209 (1935).

sondern 500 °C. Um in den endgültigen Absorptionskurven (von 20° bis 1500 °C) Fehler, die beim Anschluß der Meßwerte bei nur einer Temperatur entstehen können, zu vermeiden, wurde die Anpassung des Hochtemperaturastes an den Tieftemperaturbereich so vollzogen, daß die Abweichungen für die 4 Überdeckungstemperaturen möglichst klein waren. Es sind zwar grundsätzlich auch kontinuierliche Messungen mit dem Vakuumofen von Raumtemperatur bis 1500 °C möglich, aber bei den langen Einstellzeiten des Ofens unterhalb von 500 °C können Nullpunktswanderungen des Verstärkers und langzeitige Schwankungen der Luftfeuchtigkeit zu Fehlern führen. Hinzu kommt, daß die Absorption des MgO bis 1500 °C etwa um einen Faktor 10 zunimmt. Die entsprechende Durchlässigkeitsänderung ist so beträchtlich, daß eine gleichbleibende Genauigkeit in der Bestimmung der Absorptionskoeffizienten nicht mehr gewährleistet ist.

#### d) Fehlerabschätzung

Die erreichte Genauigkeit ist im wesentlichen durch die Fehler bedingt, die sich bei der Messung der Durchlässigkeit ergaben. Für die Absorptionsmessungen bei Raumtemperatur, die alternierend durchgeführt wurden, betrugen die Schwankungen der  $D$ -Werte maximal 0,005, während sie für die Relativmessungen, bei denen ein Temperaturumlauf etwa 20 Minuten dauerte, naturgemäß etwas größer waren. Aber auch hier waren Nullpunktswanderungen des Verstärkers und Schwankungen der Luftfeuchtigkeit keine wesentlichen Fehlerquellen, so daß eine Reproduzierbarkeit der Relativwerte auf 0,015 erreicht wurde. Damit ergibt sich insgesamt für die Absorptionskoeffizienten bei Raumtemperatur eine Genauigkeit von 2% und bei höheren Temperaturen von 5%. Mit größeren Fehlern sind die Werte für die Wellenlänge 5,12  $\mu$  behaftet, bei der die Absorption noch so schwach ist, daß sich bei einer Kristalldicke von 2,8 mm die Durchlässigkeit mit der Temperatur zu wenig ändert, um eine genaue  $\alpha$ -Bestimmung zu ermöglichen. Wegen zu starker Absorption konnten für das Wellenlängengebiet von 9,14 bis 9,73  $\mu$  die letzten Hochtemperaturwerte ebenfalls nicht genau gemessen werden.

### III. Diskussion der Ergebnisse

#### a) Absorption bei Raumtemperatur

Die Gitterschwingungsabsorption von MgO erstreckt sich über ein größeres Wellenlängengebiet, wobei sich der Absorptionskoeffizient um mehrere Zehnerpotenzen ändert und im Bereich um die Resonanzfrequenz ( $\lambda = 17,3 \mu$ ) beträchtliche Werte erreicht. Von den zahlreichen Veröffentlichungen, die über das Absorptionsspektrum von MgO erschienen sind, soll hier nur auf die eingegangen werden, die sich auf die kurzwellige Ausläuferabsorption beziehen und bei denen Einkristalle untersucht wurden. Bei Messungen an MgO-Pulver sind wegen der komplizierten Zusammenhänge zwischen Absorption und Streuung von vornherein keine eindeutigen Ergebnisse gewährleistet.

Die ersten Absorptionsmessungen an Einkristallen wurden von Barnes, Brattain und Seitz (l. c.) durchgeführt. Ihre Durchlässigkeitskurven zeigen eine ausgeprägte Feinstruktur, die aus annähernd 40 schmalen Absorptions-

banden besteht und sich von  $5\mu$  zu größeren Wellenlängen erstreckt. Diese Feinstruktur konnte von Willmot<sup>11)</sup> nicht bestätigt werden. Die von ihm bestimmte Absorptionskurve hat Nebenmaxima bei  $10,07\mu$ ,  $11,7\mu$  und  $14,8\mu$ , wie sie in ähnlicher Weise auch bei den Alkalihalogeniden auftreten, und fällt unterhalb von  $10\mu$  gleichmäßig ab. Messungen von Burstein, Oberley und Pyler<sup>12)</sup> ergeben auch unterhalb von  $10\mu$  eine Bande bei  $8,3\mu$ . Außerdem zeigt ihre Durchlässigkeitskurve für einen Kristall von 1 mm Dicke noch bei  $7,3\mu$  eine schwache Bande. Zur Klärung dieser Widersprüche wurden bei Raumtemperatur Absorptionsmessungen an Kristallen verschiedener Dicke durchgeführt, die (Abb. 5) eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Burstein, Oberley und Pyler ergeben.

Von verschiedener Seite ist die Vermutung ausgesprochen worden, daß eine Feinstruktur in den Absorptionskurven durch eine Oberflächenschicht von  $Mg(OH)_2$  oder  $MgCO_3$ , die nach längerer Zeit entstehen kann, vorgetäuscht wird. Um solche Effekte auszuschließen, wurden die Kristalle unmittelbar nach dem Polieren durchgemessen. Die Absorptionsbanden bei  $8,3$  und  $7,3\mu$  ergaben sich in jedem Fall und müssen daher als spezifisch für das MgO-Gitter angesehen werden.

#### b) Die Born-Huangsche Theorie

Bei einer befriedigenden theoretischen Deutung der Gitterschwingungsabsorption von Ionenkristallen treten erhebliche Schwierigkeiten auf. Eine direkte Wechselwirkung der elektromagnetischen Wellen ist nur mit den optischen Transversalschwingungen des Kristallgitters möglich, welche die gleiche Wellenlänge und annähernd die gleiche Frequenz haben. Da sich die Lichtwellenlängen im Ultraroten um Größenordnungen (etwa einen Faktor  $10^5$ ) von der Gitterkonstanten unterscheiden, ist diese Bedingung nur für die langwelligen Transversalschwingungen, für die der Wellenzahlvektor  $\eta$  ( $|\eta| = 1/\lambda$ ) annähernd gleich Null ist, erfüllt. Nur für diese Dispersionsfrequenzen ergeben sich unmittelbar Absorptionslinien.

In Wirklichkeit erstreckt sich die Absorption über ein größeres Wellenlängengebiet. Zu ihrer Deutung hat man in den theoretischen Arbeiten<sup>6)7)8)</sup> eine Kopplung der Dispersionsfrequenzen mit den anderen Schwingungen des Kristallgitters über Glieder 3. und höherer Ordnung im Gitterpotential eingeführt. Diese anharmonischen Anteile werden dabei mit willkürlichen Konstanten in die Gleichung für das Gitterpotential eingeführt. Auf diese Weise kann zumindest qualitativ das Auftreten von Nebenmaxima in der Umgebung der Resonanzfrequenz erklärt werden, aber es sind naturgemäß keine Aussagen über die Breite des Absorptionsgebietes und die Größe des Absorptionskoeffizienten möglich. Die willkürlichen Konstanten müssen vielmehr den jeweiligen experimentellen Ergebnissen angepaßt werden. Ein solches Verfahren ist unbefriedigend, und es erscheint daher zweifelhaft, ob die gesamte Absorption ausschließlich durch anharmonische Anteile im Gitterpotential hervorgerufen wird.

<sup>11)</sup> J. C. Willmot, Proc. phys. Soc. **63**, 389 (1950).

<sup>12)</sup> E. Burstein, J. J. Oberley u. K. Pyler, Proc. Ind. Acad. Sci. **28**, 388 (1948).

Einen wesentlichen Beitrag zu dieser Frage stellen die Untersuchungen von Burstein, Oberley und Pyler (l. c.) dar. Sie vergleichen das Absorptionsspektrum von MgO und einiger Alkalihalogenide und finden dabei zwar keine grundsätzlichen Unterschiede, jedoch gewisse Abweichungen in den Spektren. So nimmt die relative Bandbreite in der Reihenfolge LiF, MgO, NaF, NaCl, KCl ab, wobei die Kristalle mit den größeren Bandbreiten einen kleineren Ausdehnungskoeffizienten und eine höhere Debye-Temperatur aufweisen. Dieses Ergebnis ist überraschend, da ein kleiner Ausdehnungskoeffizient und eine hohe Debye-Temperatur einen geringen Anteil an anharmonischer Bindung bedingen und damit im Gegensatz zum experimentellen Befund ein besonders schmales Absorptionsgebiet zu erwarten ist. Die Polarisierbarkeit der Ionen und damit die Tendenz zu homöopolarer Bindung nehmen bei den Kristallen in etwa der gleichen Reihenfolge ab. Daraus schließen Burstein und Oberley, daß zumindest bei tiefen Temperaturen nicht die anharmonische Bindung im Kristallgitter sondern die Polarisierbarkeit der Ionen für die Breite des Absorptionsgebietes wesentlich ist.

Eine Klärung dieser Frage ist durch die Born-Huang'sche Theorie der Ultrarotabsorption möglich, die im Gegensatz zu den älteren Theorien experimentell prüfbare Voraussagen enthält. Born und Huang behandeln in ähnlicher Weise, wie das in den älteren Arbeiten geschieht, die Kopplung der Dispersionsfrequenzen mit den anderen Schwingungen des Kristallgitters über Glieder höherer Ordnung im Gitterpotential. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß ihre Dispersionsformel eine Aussage über die Temperaturabhängigkeit enthält. Es ergibt sich bei einer Beschränkung auf Glieder 3. Ordnung, daß bei hohen Temperaturen die Absorption in den Flanken der Ultrarotbande mit der 3. Potenz der Temperatur ansteigt (Born-Huang, l. c. S. 359). Den Berechnungen liegt die Annahme zugrunde, daß das elektrische Moment des Kristalls eine lineare Funktion der Koordinaten ist, welche die Verschiebung der Gitterbausteine aus ihren Gleichgewichtslagen beschreiben. Diese Annahme ist nur für einen idealen Ionenkristall erfüllt, bei dem die Elektronenhüllen völlig starr sind und nicht während der Schwingungen der Ionen um ihre Gleichgewichtslagen durch die elektrischen Felder der Umgebung deformiert werden. Die Polarisation der Ionen wird um so stärker werden, je mehr sich die Elektronenhüllen überlappen, d. h. je größer der Anteil an Valenzbindung im Kristallgitter ist.

Im allgemeinen Fall muß man für das elektrische Moment eine Reihenentwicklung nach den Verschiebungskordinaten ansetzen, wobei dann die Ionenladungen selbst nur zu den linearen Gliedern beitragen, während Glieder 2. und höherer Ordnung die Polarisation der Elektronenhülle charakterisieren. Diese elektrischen Momente höherer Ordnung führen zu einer Absorption, die sich kontinuierlich über ein größeres Wellenlängengebiet erstreckt. Beschränkt man sich auf das überwiegende elektrische Moment 2. Ordnung, so werden folgende Anregungsprozesse möglich:

1. Ein Lichtquant  $\hbar\omega$  wird absorbiert, wobei ein Oszillator mit der Eigenfrequenz  $\omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ i \end{smallmatrix} \right)$  ( $\eta$  = Wellenzahlvektor) um zwei Stufen angeregt wird:

$$\hbar\omega = 2\hbar\omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right). \quad (5)$$



2. Bei der Absorption des Lichtquants springen 2 verschiedene Oszillatoren mit dem gleichen Wellenzahlvektor  $\eta$  um je eine Stufe nach oben:

$$\hbar \omega = \hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) + \hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) \quad (6)$$

3. Ein Oszillator wird um eine Stufe angeregt, und gleichzeitig fällt ein anderer in sein nächst tieferes Niveau, wobei die Energiedifferenz

$$\hbar \omega = \hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) - \hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) \quad (7)$$

absorbiert wird. Die Gesamtabsorption für Licht der Frequenz  $\omega$  ergibt sich durch Summation über den  $\eta$ -Raum und alle Eigenfrequenzen  $j$ , für die die Bedingungen (5), (6), (7) erfüllt sind. Für die Temperaturabhängigkeit dieser Absorption durch elektrische Momente 2. Ordnung ergibt die Theorie für den Fall 2 (1 ist in 2 für  $j = j'$  enthalten):

$$n k = C_{jj'} \frac{1 - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) / k T - \hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) / k T \right)}{\left\{ 1 - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) / k T \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) / k T \right) \right\}}, \quad (8)$$

und für den Fall 3:

$$n k = C_{jj'} \frac{\exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) / k T \right) - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) / k T \right)}{\left\{ 1 - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j'} \right) / k T \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left( -\hbar \omega \left( \frac{\eta}{j} \right) / k T \right) \right\}}. \quad (9)$$

Dabei ist:

$n$  = Brechungsindex der Substanz,  
 $k$  = wellenoptischer Absorptionskoeffizient und es sind  
 $C_{jj'}$  = Konstante, die phänomenologisch in die Theorie eingeführt sind.

Eine Reihenentwicklung der Funktionen (8) und (9) ergibt, daß in beiden Fällen  $n k$  bei höheren Temperaturen linear mit der Temperatur ansteigt (Born-Huang, l. c. S. 367). Da die Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex  $n$  vernachlässigt werden kann, ist damit der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  direkt proportional der Temperatur. Der Verlauf der Funktionen bei tiefen Temperaturen wird in Abschnitt IIIc in Zusammenhang mit den Meßergebnissen behandelt.

Bei einer Untersuchung der Frage, in welchem Wellenlängengebiet sich die Absorption durch elektrische Momente höherer Ordnung auswirken kann, geht man am besten von der Tatsache aus, daß in einem Kristallgitter mit überwiegend ionogener Bindung das lineare elektrische Moment bei weitem überwiegt. Daher wird in der Umgebung der Dispersionsfrequenz der anharmonische Effekt dominieren, und die Absorption durch elektrische Momente höherer Ordnung kann nur bei Wellenlängen, die von der Resonanzfrequenz stärker abweichen, ins Gewicht fallen. Im allgemeinen wird, so vermuten Born und Huang, der anharmonische Effekt für die hohe Absorption im Gebiet der Reststrahlbande verantwortlich sein, und die elektrischen Mo-

mente höherer Ordnung werden die Ausläuferabsorption bestimmen. Wegen der verschiedenen Temperaturabhängigkeit der beiden Effekte, in dem einen Falle ein Anstieg des Absorptionskoeffizienten mit  $T^3$  und im anderen Falle eine lineare Abhängigkeit von  $T$ , kann diese Frage durch Messung der Absorption bei höheren Temperaturen experimentell entschieden werden.

### c) Vergleich unserer Meßergebnisse mit der Theorie

Die Absorptionsbande von MgO zeigt im Bereich der kurzwelligen Ausläuferabsorption eine erhebliche Temperaturverbreiterung. Dementsprechend verschieben sich die Durchlässigkeitskurven der Kristalle (Abb. 6) mit steigender

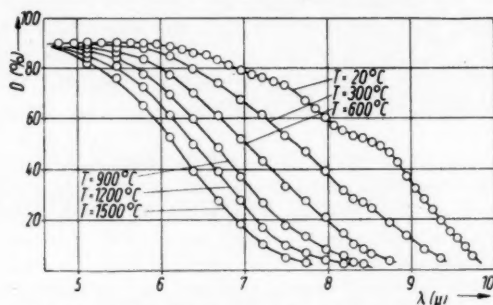


Abb. 6. Durchlässigkeit eines MgO-Kristalls ( $d=1,34$  mm) bei verschiedenen Temperaturen

gender Temperatur beträchtlich zu kürzeren Wellenlängen. Die relative Zunahme der Absorption gegenüber  $20^\circ\text{C}$  bleibt im ganzen Wellenlängengebiet annähernd die gleiche. Das ergibt sich aus der logarithmischen Darstellung

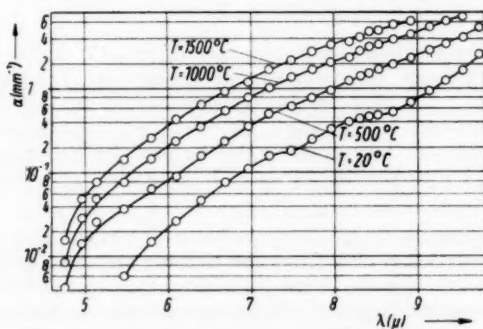


Abb. 7. Absorptionskoeffizient  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei verschiedenen Temperaturen

in Abb. 7, wo der Absorptionskoeffizient für 4 verschiedene Temperaturen ( $20^\circ\text{C}$ ,  $500^\circ\text{C}$ ,  $1000^\circ\text{C}$ ,  $1500^\circ\text{C}$ ) in Abhängigkeit von der Wellenlänge aufgetragen ist. Aus diesem experimentellen Befund kann unmittelbar geschlossen

werden, daß überall der gleiche Absorptionsprozeß vorliegt, da sonst in der Temperaturabhängigkeit grundsätzliche Unterschiede auftreten müßten. Zu

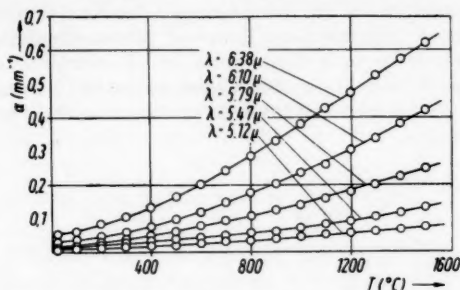


Abb. 8. Absorptionskoeffizient  $\alpha$  als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Wellenlängen

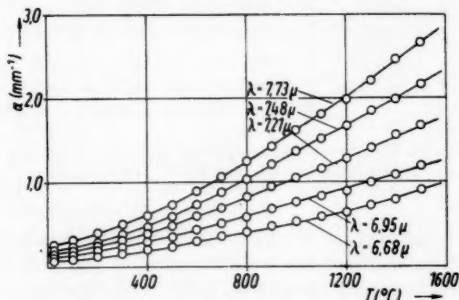


Abb. 9. Absorptionskoeffizient  $\alpha$  als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Wellenlängen

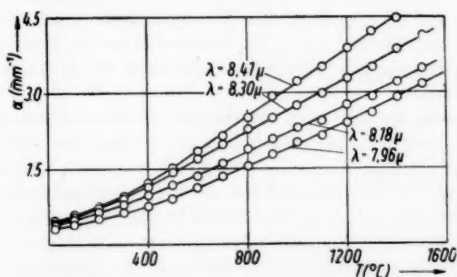


Abb. 10. Absorptionskoeffizient  $\alpha$  als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Wellenlängen

kleineren Wellenlängen hin fallen die Absorptionskurven mit einer hohen Potenz der Wellenlänge ab, wobei annähernd die Beziehung

$$\alpha = \text{const} \cdot \lambda^7$$

gilt. Aus dieser Wellenlängenabhängigkeit allein sind keine Rückschlüsse auf den Absorptionsmechanismus möglich. Die Theorie liefert in dieser Hinsicht keine Voraussagen, da die Schwingungen des Kristallgitters und die mit ihnen verbundenen elektrischen Momente phänomenologisch eingeführt werden. Dazu wären für jedes Gitter umfangreiche numerische Berechnungen erforderlich. Eine Entscheidung muß vielmehr, wie in IIIb ausgeführt wurde, durch eine Messung der relativen Intensitäten bei verschiedenen Temperaturen herbeigeführt werden.

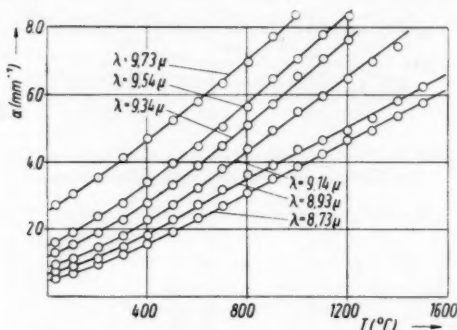


Abb. 11. Absorptionskoeffizient  $\alpha$  als Funktion der Temperatur bei verschiedenen Wellenlängen

In den Abb. 8–11 sind für 20 etwa äquidistante Wellenlängen von 5,12 bis 9,73 die Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Alle Isochromaten steigen bei höheren Temperaturen linear mit der Temperatur an, wie es von der Theorie für einen Absorptionsprozeß durch elektrische Momente 2. Ordnung vorausgesagt wird. Die Streuung der Meßwerte und die schwache Krümmung einiger Kurven auch bei hohen Temperaturen liegen dabei innerhalb der Meßgenauigkeit von 5%. Ein Anstieg des Absorptionskoeffizienten mit einer höheren Potenz, etwa  $T^2$  oder  $T^3$ , wie er für den anharmonischen Effekt vorausgesagt wird, kann mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

Charakteristische Unterschiede ergeben sich bei den einzelnen Isochromaten im Tieftemperaturbereich, bei denen in allen Fällen die Kurven flacher verlaufen. Dabei erfolgt das Abbiegen aus dem linearen Hochtemperaturast um so früher, je kleiner die Wellenlänge ist. In einer eingehenden Untersuchung wurden die Funktionen (8) und (9) für die Wellenlänge  $7,5 \mu$ , die etwa in der Mitte des interessierenden Spektralbereichs liegt, berechnet und dabei so normiert, daß der Absorptionskoeffizient für  $1500^\circ\text{C}$  gleich ist (Abb. 12).

Dabei ergibt sich für die beiden möglichen Absorptionsprozesse ein grundsätzlicher Unterschied. Für den Fall

$$\hbar\omega = \hbar\omega_j^{(v)} - \hbar\omega_{j'}^{(v)} \quad (7)$$

verschwindet die Absorption für  $T = 0$  erwartungsgemäß, da sich dann alle Oszillatoren im Grundzustand befinden und damit die Wahrscheinlichkeit

für einen Übergang in das nächst tiefere Niveau gleich Null ist. Für den Fall

$$\hbar \omega = \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) + \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) \quad (6)$$

bleibt dagegen eine Restabsorption, die einer Anregung beider Oszillatoren aus dem Grundzustand entspricht. Für die Abhängigkeit der Absorption vom Parameter  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) / \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right)$  ergibt sich in beiden Fällen, daß das Abbiegen der Kurven aus dem linearen Verlauf bei hohen Temperaturen um so eher erfolgt, je kleiner der Parameter ist. Im Falle (6) liegen dabei alle Kurven über und im Falle (7) unter der Diagonalen, die den linken unteren Eckpunkt des Diagramms mit dem oberen rechten verbindet.

Obwohl über die im MgO-Gitter tatsächlich auftretenden Oszillatorfrequenzen keine Berechnungen vorliegen, können aus dem Verlauf der in Abb. 12 eingezeichneten experimentellen Kurve doch gewisse Schlußfolgerungen gezogen werden. Ihre Extrapolation auf  $T = 0$  ergibt eine Restabsorption und damit einen Anteil des Falles (6). Da die Absorptionskurve im weiteren Verlauf in das Gebiet unterhalb der Diagonalen hinüberwechselt, sind auch Absorptionsprozesse, bei denen ein Oszillator in das nächst niedrigere Niveau fällt, an der Gesamtabsorption beteiligt. Insgesamt kommt die Absorption durch eine Mischung der beiden Prozesse (6) und (7) zustande. Diese bei  $7,5 \mu$  gewonnenen Ergebnisse sind in gleicher Weise für alle anderen Wellenlängen erfüllt. Der experimentelle Befund, daß die Absorptionskurven mit zunehmender Wellenlänge über einen größeren Temperaturbereich linear sind, ist dabei in völliger Übereinstimmung mit der Theorie und ergibt sich aus der Approximation der Exponentialfunktionen in (8) und (9) durch das lineare Glied der Reihenentwicklung nach  $T$ , die bei um so niedrigeren Temperaturen hinreichend ist, je größer die Wellenlänge wird.

Ein Vergleich unserer Ergebnisse mit anderen Messungen ist zur Zeit kaum möglich. Über die Temperaturabhängigkeit der Gitter-

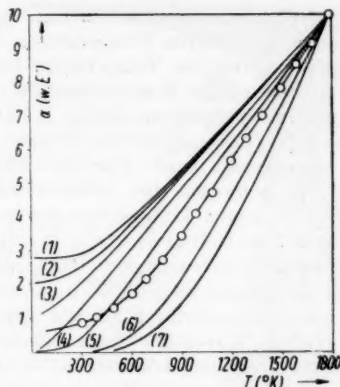


Abb. 12. Berechnete Absorptionskurven für  $\lambda = 7,5 \mu$

a)  $\hbar \omega = \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) + \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right)$

(1)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,0825 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,0825 \text{ eV}$

(2)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,1237 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,0413 \text{ eV}$

(3)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,148 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,0165 \text{ eV}$

b)  $\hbar \omega = \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) - \hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right)$

(4)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,148 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,0165 \text{ eV}$

(5)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,247 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,0824 \text{ eV}$

(6)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,412 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,247 \text{ eV}$

(7)  $\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j \end{smallmatrix} \right) = 0,4935 \text{ eV}$

$\hbar \omega \left( \begin{smallmatrix} \eta \\ j' \end{smallmatrix} \right) = 0,329 \text{ eV}$

schwingungsabsorption liegen nur wenige Untersuchungen vor. Messungen auch bei höheren Temperaturen wurden lediglich von Hellmann<sup>13)</sup> durchgeführt, der die Temperaturabhängigkeit des Reflexionsvermögens von LiF im Bereich der Reststrahlbande von 20 °C bis 600 °C untersucht hat. Hellmann findet einen Anstieg der Dämpfungskonstanten mit  $T^2$ , während nach der Born-Huang'schen Theorie näherungsweise eine Abhängigkeit mit  $T^3$  vorausgesagt wird. Für das Gebiet der Ausläuferabsorption fehlen dagegen Untersuchungen bei höheren Temperaturen. Lediglich von -196 °C bis 300 °C liegen Untersuchungen von Klier<sup>14)</sup> an LiF und NaF vor. Ferner haben noch Rubens und Hertz<sup>15)</sup> ebenfalls von -196 °C bis 300 °C, die Temperaturabhängigkeit der Absorption von NaCl und KCl für die beiden Wellenlängen 23 und 300  $\mu$  gemessen. Allein aus dem Absorptionsverlauf bei tiefen Temperaturen können keine eindeutigen Schlußfolgerungen gezogen werden. Wären die Untersuchungen auch bei höheren Temperaturen durchgeführt worden, könnten sie wesentlich zur Klärung der Frage beitragen, ob bei allen Ionenkristallen die Ausläuferabsorption durch den Anteil an homöopolarer Bindung im Gitter hervorgerufen wird.

Dem Direktor des Institutes für Angewandte Physik an der Universität Marburg, Herrn Prof. Dr. H. Wolter, danke ich für anregende Diskussionen.

<sup>13)</sup> G. Hellmann, Z. Physik **152**, 368 (1958).

<sup>14)</sup> M. Klier, Z. Physik **150**, 49 (1958).

<sup>15)</sup> H. Rubens u. G. Hertz, Berl. Ber. 256 (1912).

Aachen, Zentrallaboratorium der Allgemeinen Deutschen Philips Industrie G.m.b.H., und

Marburg, Institut für Angewandte Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Januar 1960.

#### Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigenteil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 78 51. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18B, Fernruf: 27 681, 27 682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünhaupt, Köthen (IV/5/1) L 153/60



**Experimentelle und klinische  
Untersuchungen  
des stereoskopischen Raumes**

Von Professor Dr. med.

Rudolf SACHSENWEGER, Leipzig

164 Seiten mit 8 Tabellen und 83 Abbildungen und 1 Tafel. 1958. 4°. DM 10.—

(Bildet: NOVA ACTA LEOPOLDINA  
Abhandlungen der Deutschen Akademie  
der Naturforscher Leopoldina, Neue Folge,  
Band 20, 1959. Nr. 136)

Die vorliegenden Untersuchungen befassen sich mit den Veränderungen, die der stereoskopische Raum sowie das Tiefenunterscheidungsvermögen bei herabgesetzter Sehschärfe, bei reduzierter Beleuchtung, bei kurzer Darbietungszeit, nach ausgiebiger Übung, im Zustand der Ermüdung, bei Abbildungsunterschieden beider Augen und bei Augenhintergrundserkrankungen erfährt. Auf Stereo-Skotome sowie auf die Größenverhältnisse des stereoskopischen Raumes bei Schielenden wird besonders eingegangen.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH  
VERLAG / LEIPZIG

**Kalorimeter**

nach Berthelot-  
Mahler-Köcker  
für die Heizwert-  
bestimmung fester  
und flüssiger  
Brennstoffe.



**Ölprüfgeräte**

Viskosimeter,  
Flammpunktprüfer.

**Laborgeräte**

Destillationsapparate,  
Apparate zur Bestimmung  
des Erweichungs- bzw.  
Erstarrungspunktes,  
Wasser- und Sandbäder.

**Fraktionssammler**

**VEB (K) Apparatebau**  
Potsdam-Babelsberg  
Gartenstr. 2/10

**Quantentheorie des Atoms**

Von Prof. Dr. A. RUBINOWICZ, Warschau

Übersetzung nach der 2. polnischen Auflage des Werkes „Kwantowa Teoria Atomu“. VII, 486 Seiten mit 38 Figuren im Text. 1959. gr. 8°. DM 29.80 Ln. 31.80

Dieses Lehrbuch ist aus den langjährigen Vorlesungen des Verfassers hervorgegangen. Im ersten Teil des Buches wird die Entwicklung der älteren Quantentheorie dargestellt. Es soll damit dem Leser vor Augen geführt werden, wie zwangsläufig und wie an Momenten voll dramatischer Spannung die Entwicklungsgeschichte der Quantentheorie gewesen ist.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG



**PRESSLER**  
**PHOTOZELLEN**

DGL-PRESSLER LEIPZIG

## Dosimetrie und Strahlenschutz

**Physikalische und technische Daten.** Von Prof. Dr. R. G. JAEGER, Braunschweig/Mainz. 1959. XII, 282 Seiten, 97 Abbildungen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 49,50

## Leitfaden des Strahlenschutzes

**Für Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner.** Von Dr. H. R. BECK, Karlsruhe, Dr. H. DRESEL, Freiburg/Br., und Dr. H. J. MELCHING, Freiburg/Br. Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. H. Langendorff, Freiburg/Br. 1959. XII, 253 Seiten, 100 Abbildungen, 19 Tabellen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 36,—

## Einführung in die Meßtechnik der Kernstrahlung und die Anwendung der Radioisotope

Von Prof. Dr. H. FASSBENDER, Erlangen. 1958. XII, 223 Seiten, 142 Abbildungen und 15 Tabellen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 37,50

## Sonderausschuß Radioaktivität

**Bundesrepublik Deutschland**

**Erster Bericht (Januar 1958).** 1958. 68 Seiten, 5 Abbildungen, 10 Tabellen, Gr.-8°, kartoniert DM 4,50

**Zweiter Bericht (März 1959).** 1959. 117 Seiten, 8 Abbildungen, 60 Tabellen, Gr.-8°, kartoniert DM 12,60

## Strahlenbiologie

**Grundlagen und Ergebnisse.** Von Prof. Dr. H. FRITZ-NIGGLI, Zürich. 1959. XVI, 379 Seiten, 168 teils mehrfarbige Abbildungen in 301 Einzeldarstellungen, Gr.-8°, Ganzleinen DM 65,—

## Grundlagen der Strahlenbiologie

**(Fundamentals of Radiobiology.)** Von Prof. Dr. Z. M. BACQ, Liège, und Dr. P. ALEXANDER, London, Deutsche Übersetzung herausgegeben von Priv.-Doz. Dr. H.-J. MAURER, Bern. 1958. XII, 396 Seiten, 115 Abbildungen in 173 Einzeldarstellungen, Gr.-8°, Ganzleinen DM 49,50

## Strahlenbiologie, Strahlentherapie, Nuklearmedizin und Krebsforschung

**Ergebnisse 1952—1958.** Herausgegeben von H. R. SCHINZ, Zürich, H. HOLT-HÜSEN, Hamburg, H. LANGENDORFF, Freiburg/Br., B. RAJEWSKY, Frankfurt/M., G. SCHUBERT, Hamburg. Bearbeitet von zahlreichen namhaften Fachgelehrten. 1959. VIII, 998 Seiten, 395 zum Teil mehrfarbige Abbildungen, 140 Tabellen, Lex.-8°, Halbleder DM 275,—

In der Deutschen Demokratischen Republik beziehbar im Rahmen des Kontingents

GEORG THIEME VERLAG · STUTTGART